

УСЛОВИЯ ТИПА ЛЕЖАНДРА — КЛЕБША И КЕЛЛИ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Рассматривается задача управления для системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа в классе измеримых управлений и абсолютно непрерывных траекторий:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), z(t), u(t), t), t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$x(t) = \Phi(t), t \in T_0 = [t_0 - h, t_0], \quad (2)$$

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad (3)$$

$$I(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad (4)$$

где x — n -вектор; $h > 0$; t — скаляр; $y(t) \equiv x(t-h)$; $z(t) \equiv \dot{x}(t-h)$.

Считаем выполненными следующие условия: а) функция $f(x, y, z, u, t)$ при почти всех $t \in T$ непрерывна по (x, y, z, u) вместе со своими частными производными по (x, y, z, u) до второго порядка включительно и измерима по t при всех $(x, y, z, u) \in R^n \times R^n \times R^n \times U$; б) $\Phi(t)$ — абсолютно непрерывна на T_0 ; в) U — ограниченное множество в R^r ; г) $\varphi(x)$ — скалярная гладкая функция.

Задача состоит в нахождении условий, при которых $I(u) \leq I(\tilde{u})$ для всех $\tilde{u}(t) \in U, t \in T$, где $u(t) \in \text{int } U$. Управление $u(t)$ и соответствующая ему в силу системы (1), (2) траектория $x(t)$, обеспечивающие минимум функционалу (4), называются оптимальным процессом в задаче (1) — (4).

Для систем нейтрального типа условия типа Эйлера и Лежандра — Клебша не являются, вообще говоря, следствием принципа максимума Понтрягина, что имело место в обыкновенных системах (см. [1]), так как последний справедлив лишь на некоторых направлениях области управления [2, 3]. В силу этого вывод указанных условий представляет самостоятельный интерес.

Введем сопряженный вектор $\psi(t)$, удовлетворяющий следующему соотношению:

$$\psi'(t) = \sum_{j=0}^{r(t)} \bar{\psi}'(t+jh) \prod_{i=j}^1 \frac{\partial f(x, y, z, u, t+ih)}{\partial z}, t \in T,$$

где $\bar{\psi}(t)$ — решение дифференциальной системы с опережением:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\psi}}(t) = & -\frac{\partial f'(t)}{\partial x} \bar{\psi}(t) - \sum_{\mu=1}^{r(t)} \left[\frac{\partial f'(t)}{\partial x} \prod_{s=1}^{\mu} \frac{\partial f'(t+sh)}{\partial z} + \frac{\partial f'(t+h)}{\partial y} \times \right. \\ & \left. \times \prod_{s=1}^{\mu-1} \frac{\partial f'(t+(s+1)h)}{\partial z} \right] \bar{\psi}(t+\mu h), t \in T, \bar{\psi}(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\bar{\psi}(t) \equiv 0, t(t_1, t_1+h],$$

$r(t)$ — целое неотрицательное число, удовлетворяющее условию: $t + r(t)h < t_1 \leq t + (r(t)+1)h$. Введем гамильтониан системы $H = \psi'f$ и обозначение

$$G(t, \theta) = \sum_{j=0}^{r(\theta)-1} \prod_{i=1}^j \frac{\partial f'(t+ih)}{\partial z} \frac{\partial^2 H(t+(j+1)h)}{\partial z^2} \prod_{i=j}^1 \frac{\partial f'(t+ih)}{\partial z}, t, \theta \in T.$$

Теорема 1. Вдоль оптимального процесса $\{x(t), u(t)\}$ задачи (1) — (4) при почти всех $t \in T$ выполняется условие Эйлера

$$\frac{\partial H(x, y, z, \psi, u, t)}{\partial u} = 0$$

и критерий Лежандра — Клебша

$$v' \left[\frac{\partial^2 H(t)}{\partial u^2} + \frac{\partial f'(t)}{\partial u} G(t, t) \frac{\partial f'(t)}{\partial u} \right] v \leq 0, \quad (5)$$

где v — любой r -вектор. Теорема 1 доказывается по схеме из [1]. Соответствующие модификации на случай измеримых управлений проводятся по схеме [4].

Замечание 1. Пусть множество допустимых скоростей $f(x, y, z, U, t)$ выпукло. Тогда следствием принципа максимума [2] является условие $v' \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} v \leq 0$, которое, очевидно, слабее критерия (5) и, в частности, вырождается для линейных по управлению систем.

Замечание 2. Пусть f линейна по u , $f(x, y, z, U, t)$ выпукло, $u(\cdot)$ особо на T в смысле принципа максимума. Оказывается, в этом случае условие (5) можно получить как следствие «промежуточного» условия, приведенного в [3].

Определение 1. Управление $u(t)$, $t \in T$, называется особым в классическом смысле, если существует множество $\sigma \in T$, $\text{mes } \sigma > 0$, такое, что при почти всех $t \in \sigma$ выполняются соотношения:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial u} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 H(t)}{\partial u^2} + \frac{\partial f'(t)}{\partial u} G(t, t) \frac{\partial f(t)}{\partial u} \equiv 0.$$

Наложим дополнительные требования гладкости на управление $u(t)$ в некоторой точке $\theta \in T$: д) в точке $t = \theta$ существует и непрерывна справа полная производная по времени функций $\frac{\partial f(t)}{\partial u}$ и $S(x, y, z, \psi, u, t; \theta)$, где

$$S(t; \theta) = 2 \frac{\partial^2 H(t)}{\partial x \partial u} + 2 \frac{\partial^2 H(t+h)}{\partial y \partial z} \frac{\partial f(t)}{\partial u} + 2 \frac{\partial f'(t+h)}{\partial y} G(t+h, \theta) \times \\ \times \frac{\partial f(t+h)}{\partial z} \frac{\partial f(t)}{\partial u} + 2 \frac{\partial f'(t)}{\partial x} G(t, \theta) \frac{\partial f(t)}{\partial u}.$$

Исследуя вторую вариацию функционала $I(u)$ на вариациях управления Келли [5], получим следующий результат:

Теорема 2. Пусть в задаче (1)–(4) выполнены условия а)–д). Тогда вдоль особого в классическом смысле оптимального процесса $\{x(t), u(t)\}$ при почти всех $\theta \in \sigma$ и всех $v \in R^r$ выполняется условие Келли: $v' L(\theta) v \geq 0$, где

$$L(\theta) = - \frac{\partial f'(\theta)}{\partial u} \left[\frac{\partial^2 H(\theta)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H(\theta+h)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H(\theta+h)}{\partial y \partial z} \frac{\partial f(\theta)}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial f'(\theta)}{\partial x} G(\theta, \theta) \frac{\partial f(\theta)}{\partial x} + \frac{\partial f'(\theta+h)}{\partial y} G(\theta+h, \theta) \left(\frac{\partial f(\theta+h)}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\partial f(\theta+h)}{\partial z} \frac{\partial f(\theta)}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial f(\theta)}{\partial u} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial f'(\theta)}{\partial u} S(\theta; \theta) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial f'(\theta)}{\partial u} \cdot \frac{d}{dt} S(t; \theta)|_{t=\theta} + \frac{\partial f'(\theta)}{\partial u} \frac{\partial f'(\theta)}{\partial x} S(\theta; \theta).$$

Замечание 3. Можно выделить некоторые классы систем, для которых д) выполняется автоматически. Таковыми являются, например, системы с правой частью вида: $f(x, y, z, u, t) = f_0(x, y, t) + f_1(x, t)z + f_2(t)u$, где f_1 — $n \times n$ -матрица, f_2 — $n \times r$ -матрица, а $\partial f_1 / \partial t$, $\partial f_2 / \partial t$ существуют и непрерывны справа.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М., 1973.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, 1974.
3. Горелик С. Б., Мордухович Б. Ш. Необходимые условия оптимальности высокого порядка в системах с последствием нейтрального типа и некоторые приложения / Редкол. ж. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1.: Физ. Мат. Мех.». Минск, 1985. Деп. в ВИНТИ 12.02.85. № 1154-85.
4. Мордухович Б. Ш. // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1982. № 6. С. 117.
5. Келли Г. // Ракетная техника и космонавтика. 1964. № 8. С. 26.

Поступила в редакцию 22.05.85.