УДК 519.95

И. В. ГАЙШУН, В. В. ГОРЯЧКИН

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

1. Пусть Z_+^2 — множество точек $k=(k_1,\ k_2)$ двумерного пространства R^2 с неотрицательными целочисленными координатами, $e_1=(1,\ 0)$, $e_2=(0,\ 1)$.

Рассмотрим уравнение

$$Ax(k+e_1)+Bx(k+e_2)+Px(k)=f(k), \tag{1}$$

в котором $x{:}Z_+^2\to R^n$ — неизвестная функция; A, B, P — попарно коммутативные $(n\times n)$-матрицы с элементами из поля C комплексных чисел; $f: Z_+^2\to R^n$ — некоторая функция.

Уравнения вида (1) возникают в теории многомерных дискретных систем [1], а также при исследовании распределенных дискретных систем управления [2]. В таких системах уравнению (1) подчиняются управляющие функции, в связи с чем описание всех решений этого уравнения имеет определенное значение для теории управления.

Для определения решений уравнения (1) необходимо задать начальные условия; способ задания этих условий и процедура построения решений существенно зависят от свойств матриц A и B. Наиболее простой случай возникает, когда хотя бы одна из матриц A, B невырождена. Если невырожденной является матрица A, то, положив $x(0,\ k_2)=\psi(k_2)$, $\psi(k_2)\in R^n$, $k_2\geqslant 0$, с помощью несложных вычислений найдем, что

$$x(k_1,\ k_2)=(-1)^{k_1}\sum_{i=0}^{k_1}C_{k_1}^i(A^{-1}P)^{k_1-i}(A^{-1}B)^i\psi(k_2+i)+$$
$$+\sum_{i=1}^{k_1}(-1)^{k_1-i}\sum_{j=0}^{k_1-i}C_{k_1-i}^j(A^{-1}P)^{k_1-i-j}(A^{-1}B)^jA^{-1}f(i-1,\ k_2+j) \tag{2}$$

(C_m^i — число сочетаний из m элементов по i элементов). Если функции ψ меняются произвольным образом, то формула (2) описывает совокупность всех решений уравнения (1).

В случае невырожденности матрицы B аналогичным образом получим все решения, задавая начальные условия $x(k_1,\ 0)=\varphi(k_1)$, $\varphi(k_1)\in R^n$, $k_1\geqslant 0$, с произвольной функцией φ.

2. Достаточно просто осуществляется построение решений уравнения (1) и в случае, когда матрицы A, B вырождены, но пучок $B+\lambda A$ регулярен [3, с. 332]. Пусть $\alpha\in C$ такова, что матрица $B+\alpha A$ невырождена. Введем обозначения: $A_1=(B+\alpha A)^{-1}A$, $B_1=(B+\alpha A)^{-1}B$, $P_1=(B+\alpha A)^{-1}P$, $\hat{f}=(B+\alpha A)^{-1}f$. Тогда матрицы A_1, B_1, P_1 попарно коммутативны и $B_1+\alpha A_1=E$ (E — единичная матрица), причем без ограничения общности можно считать, что матрица A_1 имеет жорданову форму.

Пусть $A_1=\operatorname{diag}(I_1,\ N_1)$, где блочная матрица I_1 состоит из жордановых клеток с ненулевыми диагональными элементами, а N_1 объединяет клетки с нулевыми диагональными элементами. Умножим (1) на $(B+\alpha A)^{-1}$. Тогда, согласно [3, с. 203—205], получим систему двух независимых уравнений

$$\begin{aligned} &I_1x_1(k+e_1)+(E_1-\alpha I_1)x_1(k+e_2)+P_{11}x_1(k)=\hat{f}_1(k),\\ &N_1x_2(k+e_1)+(E_2-\alpha N_1)x_2(k+e_2)+P_{22}x_2(k)=\hat{f}_2(k), \end{aligned} \tag{3}$$

у которых матрицы I_1 и $E_2 - \alpha N_1$ невырождены, поэтому все решения каждого из уравнений системы (3), а значит, и уравнения (1), могут быть получены так же, как в п. 1.

Общую формулу для решений системы (3) проще всего получить с помощью представления Дразина матриц A и B [4, 5].

В нашем случае *) $A_1^D = \mathrm{diag}\,(I_1^{-1}, 0)$, $(E - A_1^D A_1)\, B_1^D = \mathrm{diag}(0, (E_2 - \alpha N_1)^{-1})$ и
$$x(k_1, k_2) = (-1)^{k_1} \sum_{i=0}^{k_1} C_{k_1}^i (A_1^D P_1)^{k_1 - i} (A_1^D B_1)^i \, (A_1 A_1^D)\, \psi(k_2 + i) +$$
$$+ (-1)^{k_2} \sum_{j=0}^{k_2} C_{k_2}^j (B_1^D P_1)^{k_2 - j} (B_1^D A_1)^j \, (E - A_1 A_1^D)\, \varphi(k_1 + j),$$
где $\varphi(k_1)$, $\psi(k_2)$ — произвольные функции со значениями в R^n. Так как произведения $A_1^D P_1$, $A_1^D B_1$, $A_1 A_1^D$, $B_1^D A_1$, $B_1^D P_1$, $A_1^D \hat{f}$, $B_1^D \hat{f}$ не зависят от выбора α, то от выбора α не зависит и $x(k_1, k_2)$.

3. Если пучок $B + \lambda A$ сингулярен, то ситуация значительно усложняется и приводит к изучению систем вида (1) (но меньшей размерности), между решениями которых могут возникать достаточно сложные связи.

Пусть (без ограничения общности) матрица A представлена в жордановой форме $A = \mathrm{diag}(I, N)$, где блоки I, N имеют такую же структуру, как и блоки I_1, N_1. Так как матрицы A, B, P попарно коммутативны, то уравнение (1) разбивается на систему двух независимых уравнений:
$$Ix_1(k + e_1) + B_1 x_1(k + e_2) + P_1 x_1(k) = f_1(k),$$
$$Nx_2(k + e_1) + B_2 x_2(k + e_2) + P_2 x_2(k) = f_2(k), \tag{4}$$
первое из которых (в силу невырожденности I) решается так же, как и в п. 1.

Приведя к жордановой форме матрицу B_2, мы точно так же разложим уравнение (4) в систему двух независимых уравнений, одно из которых удовлетворяет требованиям п. 1. Продолжая этот процесс, мы за конечное число шагов придем к необходимости решения уравнения
$$Qy(k + e_1) + Ry(k + e_2) + Ty(k) = v(k), \tag{5}$$
в котором одна из матриц состоит из жордановых клеток с нулями на диагонали, а другая подобна некоторой жордановой матрице с нулями на диагонали, при этом матрицы Q, R, T попарно коммутируют.

Для решения уравнения (5) можно воспользоваться следующим приемом. Известно [6], что одним преобразованием подобия матрицы Q, R, T можно привести к треугольному виду и, значит, от уравнения (5) перейти к системе скалярных уравнений
$$\sum_{i=1}^{j} \alpha_{ij} z_i (k + e_1) + \sum_{i=1}^{j} \beta_{ij} z_i (k + e_2) + \sum_{i=1}^{j} \gamma_{ij} z_i (k) = \omega_j(k), \; j = 1, \dots s. \tag{6}$$

Рассмотрим первое уравнение системы (6): $\alpha_{11} z_1(k + e_1) + \beta_{11} z_1(k + e_2) + \gamma_{11} z_1(k) = \omega_1(k)$. Если $|\alpha_{11}| + |\beta_{11}| \neq 0$, то так же, как в п. 1, получим семейство решений, зависящее от произвольной скалярной функции. Если же $\alpha_{11} = \beta_{11} = 0$, то при $\gamma_{11} \neq 0$ $z_1(k) = \omega_1(k)/\gamma_{11}$; при $\alpha_{11} = \beta_{11} = \gamma_{11} = 0$ рассматриваемое уравнение совместно тогда и только тогда, когда $\omega_1(k) = 0$, при этом его решением является любая функция $z_1(k)$.

Таким образом, мы установили необходимое и достаточное условие совместности первого уравнения и (в случае совместности) описали все его решения. Подставляя найденные функции $z_1(k)$ в систему (6) при

* В целях сокращения полагаем $f_1 = f_2 = 0$; общий случай легко получается из (2).

$j = 2$, получаем уравнение $\alpha_{22}z_2(k+e_1)+\beta_{22}z_2(k+e_2)+\gamma_{22}z_2(k)=\omega_2'(k)$, где $\omega_2'(k)=\omega_2(k)-\alpha_{12}z_1(k+e_1)-\beta_{12}z_1(k+e_2)-\gamma_{12}z_1(k)$. Рассуждая, как и в случае $j = 1$, мы либо определим решение $z_2(k)$, зависящее от произвольной функции ($|\alpha_{22}|+|\beta_{22}|\neq 0$), либо найдем $z_2(k)=\omega_2'(k)/\gamma_{22}$ ($\alpha_{22}=\beta_{22}=0$, $\gamma_{22}\neq 0$), либо получим необходимое и достаточное условие совместности $\omega_2'(k)=\omega_2(k)-\alpha_{12}z_1(k+e_1)-\beta_{12}z_1(k+e_2)-\gamma_{12}z_1(k)=0$ ($\alpha_{22}=\beta_{22}=\gamma_{22}=0$), при этом $z_2(k)$ будет произвольной функцией.

Продолжая эту процедуру далее, либо на каком-то шаге убедимся в несовместности системы (6), либо опишем все ее решения.

Замечание. Ясно, что исходное уравнение (1) также можно решать, приведя матрицы A, B, P к треугольному виду. Однако такой путь достаточно трудоемкий, поэтому при изучении конкретных уравнений целесообразно выбирать максимальную «регулярную» часть матриц A, B, а метод триангуляризации матриц A, B, P применять лишь к «сингулярной» части (5), которая имеет значительно меньшую размерность.

Список литературы

1. Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск, 1983. С. 229.
2. Мехталиев А. И. // Проблемы оптимального управления. Минск, 1981. С. 243.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.
4. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных уравнений. Новосибирск, 1980. С. 44.
5. Krakhotko V. Controllabilità e osservabilità dei sistemi lineari degenerati di controllo. // Rapporto della Facoltà di Ingegneria. Università di Firenze. RT-11/81. 1981. P. 1.
6. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., 1972. С. 111.

Поступила в редакцию 17.01.86.