Доказательство. Необходимость следует из предложения 2, а достаточность непосредственно вытекает из теоремы 3 и формулы (2), так как из равенств $f(\sigma(T)\setminus\pi_{00}(T))=\sigma(f(T))\setminus\pi_{00}(f(T))$ и $\sigma_{ew}(T)=\sigma(T)\setminus\pi_{00}(T)$ находим, что $f(\sigma_{ew}(T))=\sigma(f(T))\setminus\pi_{00}(f(T))$, откуда получаем необходимое утверждение.

Замечание 2. Для оператора T из второго контрпримера в доказательстве теоремы 2 $\sigma_{ew}(T)=\{-1\}\cup\{\lambda\colon |\lambda|\leqslant 1/2\}$ и поэтому теорема Вейля для оператора T верна. Однако, хотя $p(\sigma_{ew}(T))=\sigma_{ew}(p(T))$ для $p(t)=t^2$, где $\sigma_{ew}(p(T))=\{\lambda\colon |\lambda|\leqslant 1/4\}\cup\{1\}$, теорема Вейля для оператора $p(T)$ не выполняется. Заметим, что точка $1\in\pi_{00}(p(T))$ не является полюсом конечного ранга и, следовательно, условие теоремы $\pi_{00}(p(T))=\hat{\pi}_{00}(p(T))$ не выполнено.

В работе [6] показано, что если у оператора $T\in\boldsymbol{B}(X)$ любая изолированная точка спектра является его собственным значением и оператор удовлетворяет теореме Вейля, то теорема Вейля справедлива для оператора $p(T)$, где p — полином, тогда и только тогда, когда $p(\sigma_{ew}(T))=\sigma_{ew}(p(T))$.

Список литературы

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. М., 1962. Т. 1.
2. Milicic D., Veselic K. // Glas. mat. 1971. V. 6. N 1. P. 73.
3. Coburn L. A. // Michigan Math. J. 1966. V. 13. P. 285.
4. Berberian S. K. // Indiana Univ. Math. J. 1970. V. 20. N 4. P. 529.
5. Oberai K. K. // Ill. J. Math. 1974. V. 18. N 2. P. 208.
6. Oberai K. K. // Ibid. 1977. V. 21. N 1. P. 84.
7. Еровенко В. А. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 7. С. 592.
8. Еровенко В. А. // Там же. 1984. Т. 28. № 12. С. 1068.
9. Еровенко В. А. // Там же. 1985. Т. 29. № 11. С. 969.
10. Еровенко В. А. // Там же. 1986. Т. 30. № 4. С. 301.
11. Еровенко В. А. // Там же. 1986. Т. 30. № 8. С. 681.
12. Gramsch B., Lay D. // Math. Ann. 1971. V. 192. N 1. P. 17.
13. Gustafson K. // Indiana Univ. Math. J. 1976. V. 25. N 8. P. 769.

Поступила в редакцию 29.11.85.

УДК 519.852

В. В. КРАХОТКО, В. В. ПАВЛОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С БЫСТРОМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается алгоритм решения задачи оптимизации линейной нестационарной системы, основанный на применении метода усреднения [1] и использовании метода опорных задач [2—4].

1. Постановка задачи. Основные результаты. Пусть дана следующая задача:

$$I(u)=c'x(t^*)\to\max,\quad \dot{x}=Ax+b(t)u,\quad x(0)=x_0, \tag{1}$$

$$Hx(t^*)=g,\ |u(t)|\leqslant 1,\ t\in[0,t^*], \tag{2}$$

где A, H — постоянные $n\times n$ и $m\times n$-матрицы; $b(t)$, $t\in T$ — μ-периодическая непрерывная n-вектор-функция (μ — малый параметр; $\mu>0$); c и g — постоянные n, m-векторы.

Управление $u=(u(t),t\in T)$ назовем допустимым, если $u(t)$, $t\in T$ — кусочно-постоянная функция и если оно вместе с соответствующей ему траекторией $x(t)$, $t\in T$ системы (1) удовлетворяет ограничениям (2).

Применив к системе (1) метод усреднения [1], получим задачу оптимизации линейной стационарной системы с континуумом входов:

$$c'\underline{x}(t^*)\to\max,\quad \dot{\underline{x}}=A\underline{x}+\frac{1}{\mu}\int_0^{\mu}b(\omega)\,u(t,\omega)\,d\omega, \tag{3}$$

$$\underline{x}(0)=x_0,\ H\underline{x}(t^*)=g,\ |u(t,\ \omega)|\leqslant 1,\ (t,\ \omega)\in S=T\times\Omega, \tag{4}$$

где $T=[0,\ t^*]$, $\Omega=[0,\ \mu]$.

Под допустимым управлением будем понимать скалярную функцию $u(t,\ \omega)$, $|u(t,\ \omega)|\leqslant 1$, $(t,\ \omega)\in S$, принимающую конечное множество значений и меняющую их на непрерывных конечно-параметрических кусочно-гладких линиях.

Пусть $u^0(t,\ \omega)$, $\underline{x}^0(t)$, $t\in T$, $\omega\in\Omega$,—оптимальные управление и траектория задачи (3)—(4). Разобьем отрезок $T=[0,\ t^*]$ точками t_i, $i=\overline{1,\ N}$, $t^*=N\mu$ и выберем точки $\bar{t}_i\in[t_{i-1},\ t_i[$, $i=\overline{1,\ N}$. Построим управление $u^0_\square$:

$$u^0_\square(\mu(i-1)+\omega)=u(\bar{t}_i,\ \omega),\ \omega\in[0,\ \mu[,\ i=\overline{1,\ N} \tag{5}$$

и найдем соответствующую ему траекторию $x^0_\square(t)$, $t\in T$ системы (1).

Справедливо утверждение [2].

Теорема 1. Для любых сколь угодно малого $\eta_*>0$ и сколь угодно большого t^* существует такое число $\mu_*>0$, что при всех $\mu\in]0,\ \mu_*]$ выполняются неравенства: $\|Hx^0_\square(t^*)-g\|\leqslant\eta_*$, $c'x^0(t^*)-c'x^0_\square(t^*)\leqslant\eta_*$, т. е. при достаточно малых μ управление $u^0_\square(t)$, $t\in T$, (5) можно взять в качестве приближенного решения задачи (1)—(2); $x^0(t)$—оптимальная траектория задачи (1)—(2).

Рассмотрим задачу (3), (4). Совокупность изолированных точек $S_{оп}=\{(t_i,\ \omega_j)\in S\}$, $|S_{оп}|=m$, назовем опорой задачи (3)—(4), если не вырождена опорная матрица $P_{оп}=P(S_{оп})$, со столбцами $p(t,\ \omega)=Hq(t,\ \omega)$, $(t,\ \omega)\in S_{оп}$, где $q(t,\ \omega)$—решение системы: $\partial q(t,\ \omega)/\partial t=-Aq(t,\ \omega)$, $q(t^*,\ \omega)=b(\omega)$.

Пару $\{u,\ S_{оп}\}$ из допустимого управления $u(t,\ \omega)$, $(t,\ \omega)\in S$, и опоры задачи (3)—(4) назовем опорным управлением.

Допустимое управление $u^\varepsilon(t,\ \omega)$, $(t,\ \omega)\in S$ назовем субоптимальным (ε—оптимальным), если оно вместе с соответствующей траекторией $\underline{x}^\varepsilon(t)$, $t\in T$, системы (3) удовлетворяет неравенству $J(u^0)-J(u^\varepsilon)\leqslant\varepsilon$, где $\varepsilon\geqslant 0$—заданное число; u^0—оптимальное управление в задаче (3)—(4).

Пусть $\{u,\ S_{оп}\}$—опорное управление, $\underline{x}(t)$, $t\in T$,—соответствующая)раектория системы (3). Вычислим m-вектор потенциалов $y'=(c'q(t,\ \omega),\ t,\ \omega)\in S_{оп})'P^{-1}_{оп}$ и коуправление $\Delta(t,\ \omega)=\psi'(t)b(\omega)$, $(t,\ \omega)\in S$, где $\psi(t)$, $\in T$—решение сопряженной системы:

$$\dot{\psi}=-A'\psi,\ \psi(t^*)=H'y-c. \tag{6}$$

Справедливо утверждение [4].

Теорема 2. При любом $\varepsilon\geqslant 0$ для ε-оптимальности допустимого управления $u^\varepsilon=u^\varepsilon(t,\ \Omega)$, $t\in T$, необходимо и достаточно существование такой опоры $S^\varepsilon_{оп}$, что вдоль траекторий $\underline{x}^\varepsilon(t)$, $\psi^\varepsilon(t)$, $t\in T$, прямой (3) и сопряженной (6) систем

$$H(\underline{x}^\varepsilon(t),\ \psi^\varepsilon(t),\ u^\varepsilon(t,\ \Omega))=\min_{|u(\Omega)|\leqslant 1}H(\underline{x}^\varepsilon(t),\ \psi^\varepsilon(t),\ u(\Omega))+\varepsilon(t),$$

где $\beta(u^\varepsilon,\ S^\varepsilon_{оп})=\int\limits_0^{t^*}\varepsilon(t)dt\leqslant\varepsilon$, $H(\underline{x},\ \psi,\ u(\Omega))=\psi'Ax+\frac{1}{\mu}\int\limits_0^{\mu}\psi'b(\omega)u(t,\omega)d\omega$—гамильтониан системы (3).

2. Алгоритм. Пусть при заданном $\varepsilon\geqslant 0$ для начального опорного управления $\{u,\ S_{оп}\}$ не выполняется принцип ε-минимума. Итерация $\{u,\ S_{оп}\}\to\{\bar{u},\ \bar{S}_{оп}\}$ основана на уменьшении оценки субоптимальности $\beta(u,\ S_{оп})$ и состоит из следующих процедур: а) замена управления; б) доводка.

а) По опоре $S_{оп}$ строим коуправление $\Delta(t,\ \omega)$, квазиуправление $\Upsilon(t,$

ω), квазитраекторию $\varkappa(t)$, $t \in T$ системы (3). Вычислим m-вектор $\lambda = \lambda(S_{оп}) = P_{оп}^{-1}(g - H\varkappa(t^*))$.

Если $\lambda = 0$, то $\Upsilon(t, \omega)$ будет оптимальным управлением в задаче (3)—(4). Если $\|\lambda\| \leqslant \rho$, где ρ — параметр метода, то переходим к процедуре доводки. Если $\|\lambda\| > \rho$, то формируем опорную задачу.

Для этого вблизи нулей $\Delta(t, \omega)$ выделим множество $S_\alpha = \{(t, \omega) \in S: |\Delta(t, \omega)| \leqslant \alpha\}$, где α — параметр метода. Множество S_α разбиваем с шагом h_α на $4m$ подмножеств S_α^i, $i = \overline{1, 4m}$ и m более «крупных» подмножеств $S_\alpha^j = S_\alpha \setminus S_\alpha^i$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, 4m}$, где m — число ограничений в задаче (3)—(4). Множество $S_* = S \setminus S_\alpha$ делим на $m+1$ — «крупные» подмножества S_*^k, $k = \overline{1, m+1}$. Подсчитаем величины:

$$q_i = \iint\limits_{S_\alpha^i} p(t, \omega)\, d\omega dt, \quad g_i = \iint\limits_{S_\alpha^i} c'q(t, \omega)\, d\omega dt,$$

$$d_{*i} = \max_{(t, \omega) \in S_\alpha^i} (-1 - u(t, \omega)), \quad d_i^* = \min_{(t, \omega) \in S_\alpha^i} (1 - u(t, \omega)), \quad i = \overline{1, 5m},$$

$$u(t, \omega) = u_\alpha = \mathrm{const}, \ (t, \omega) \in S_{оп}, \text{— лежит на границе } S_\alpha^i;$$

$$q_{*i} = \iint\limits_{S_*^i} p(t, \omega)\, \Upsilon(t, \omega)\, d\omega dt, \quad g_{*i} = \iint\limits_{S_*^i} c'q(t, \omega)\, \Upsilon(t, \omega)\, d\omega dt,$$

$$d_{*i} = 0, \ d_i^* = 1, \quad i = \overline{5m+1, 6m+1},$$

где $\Upsilon(t, \omega) = 1 - u(t, \omega)$, если $\Delta(t, \omega) < 0$, $\Upsilon(t, \omega) = -1 - u(t, \omega)$, если $\Delta(t, \omega) > 0$. Формируем опорную задачу:

$$F(z) = \sum_{i=1}^{6m+1} g_i z_i \to \max; \quad \sum_{i=1}^{6m+1} q_i z_i = 0; \tag{7}$$

$$d_{*i} \leqslant z_i \leqslant d_i^*, \quad i = \overline{1, 5m}; \quad 0 \leqslant z_j \leqslant 1, \ j = \overline{5m+1, 6m+1}.$$

Решив задачу (7) адаптивным методом [3], получим оптимальный план $(z^0, Q_{оп}^0)$. Могут встретиться следующие случаи:

1°) Индексы в $Q_{оп}^0$ соответствуют подмножествам из S_α^i, $i = \overline{1, 4m}$. Вычисляем: $\bar{u}(t, \omega) = u(t, \omega) + z_i^0 \Upsilon(t, \omega)$, $i = \overline{5m+1, 6m+1}$, $(t, \omega) \in S_*^i$, $\bar{u}(t, \omega) = u(t, \omega) + z_i^0$, $i = \overline{1, 5m}$, $(t, \omega) \in S_\alpha^i$; $\beta(\bar{u}, S_{оп}) = \beta(u, S_{оп}) - F(z^0)$. Если $\beta(\bar{u}, S_{оп}) \leqslant \varepsilon$, то $\bar{u}(t, \omega)$ — субоптимальное управление. В противном случае считаем вектор λ; если $\|\lambda\| \leqslant \rho$, то переходим к доводке. Если $\|\lambda\| > \rho$, то в $S_{оп}$ включаем m точек $(t_i, \omega_j) \in S_\alpha^i$, $i = \overline{1, 4m}$, соответствующих переменным с наименьшими оценками $\Delta_j' = y'q_j - g_j$, $j = \overline{1, 4m}$, уменьшаем шаг h_α, формируем опорную задачу и решаем ее.

2°) Индексы в $Q_{оп}^0$ соответствуют подмножествам S_α^i, $i = \overline{4m+1, 5m}$. Области из S_α^i, $i = \overline{1, 4m}$, где управление принимает граничные значения, объединяем в m более «крупных» подмножеств, но прямые ограничения не изменяем. Множества S_α^i, $i = \overline{4m+1, 5m}$ делим с шагом h_α на $4m$ подмножеств, индексы m подмножеств с наименьшими оценками включаем в $Q_{оп}$ и решаем опорную задачу.

3°) Индексы в $Q_{оп}^0$ соответствуют подмножествам S_*^i, $i = \overline{5m+1, 6m+1}$. Ситуация аналогична 2°).

б) Если $\|\lambda\| \leqslant \rho$, то квазиуправление $\Upsilon(t, \omega)$, построенное по опоре $S_{оп}$, близко к оптимальному. Процедура доводки состоит в поиске такой опоры $\bar{S}_{оп}$, что для соответствующей квазитраектории $\varkappa(t)$, $t \in T$ выполняются ограничения (4) задачи (3)—(4).

Опору $\bar{S}_{оп}$ будем находить из решения системы уравнений $H\varkappa(t^*, \gamma) = g$ методом Ньютона, где $\gamma^{нач} = ((t_i, \omega_j) \in S_{оп})$. Построенное по опоре квазиуправление $\overline{\Upsilon}(t, \omega)$ будет оптимальным для задачи (3)—(4). Затем по формулам (5) строим управление $u^0_\square(t)$, $t \in T$.

Пример.

$$x_2(4) \to \max, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = b(t)u, \end{cases} \quad x(0) = 0,$$
$$x_1(4) = 59/150, \; |u(t)| \leqslant 1, \; T = [0; 4], \; b(t) = \{t - \mu i, \; t \in]i\mu, \tag{8}$$

$(i+1)\mu]$, $i = \overline{0, 19}$, $\mu = 1/5$; $u^0(t) = -1$, $t \in]0; 0{,}5623194]$, $u^0(t) = +1$, $t \in]0{,}5623194; 4]$, $x_1^0(4) = 0{,}3933339$, $x_2^0(4) = 0{,}2936526$ — оптимальное управление и значение оптимальной траектории в точке $t^* = 4$ для задачи (8).

Усредняя систему в (8), переходим к задаче:

$$\underline{x}_2 \to \max, \quad \begin{cases} \dot{\underline{x}}_1 = \underline{x}_2, \\ \dot{\underline{x}}_2 = 5 \int\limits_0^{1/5} tu(t, \omega)\, d\omega, \end{cases} \underline{x}(0) = 0, \tag{9}$$

$\underline{x}_1(4) = 59/150$, $|u(t, \omega)| \leqslant 1$, $\Omega = [0; 1/5]$, $T = [0; 4]$.

Зададим $\alpha = 1/45$ и $\rho = 0, 1$. Возьмем $S_{\text{оп}} = \{1; 1/10\}$, тогда $\Delta(t, \omega) = -\frac{1}{3}\omega(1-t)$. Начальное допустимое управление $u(t, \omega) = 59/120$, $(t, \omega) \in S = [0; 1/5] \times [0; 4]$.

Оценка субоптимальности $\beta(u, S_{\text{оп}}) = 0{,}02022$ и $\|\lambda\| = 0{,}97778$. Опорная задача имеет вид: $S_\alpha = [2/3; 4/3] \times [0; 1/5]$; $S_* = S \setminus S_\alpha$; $\sum\limits_{i=}^{7} g_i z_i \to \max$;

$\sum\limits_{i=1}^{7} q_i z_i = 0$, $-1{,}4916667 \leqslant z_i \leqslant 0{,}5083333$, $i = \overline{1, 5}$; $0 \leqslant z_i \leqslant 1$, $i = \overline{6, 7}$.

Решив ее, получаем: $\overline{u}(t, \omega) = -1$, $[0; 1/5] \times [0; 7/12]$, $\overline{u}(t, \omega) = +1$, $[0; 1/5] \times [7/12; 4]$. Подсчитываем вектор λ, $\|\lambda\| = 0{,}076016$. Далее переходим к доводке, взяв за опору $\tilde{S}_{\text{оп}} = \{7/12; 1/10\}$. В результате получим $\overline{S}_{\text{оп}} = \{0{,}5455343; 1/10\}$; $\Upsilon(t, \omega) = -1$, $(t, \omega) \in [0; 1/5] \times [0; 0{,}5455343]$, $\Upsilon(t, \omega) = +1$, $[0; 1/5] \times [0{,}5455343; 4]$, что является оптимальным управлением для задачи (9). Построим управление $u^0_\square(t)$ и найдем соответствующую ему траекторию $x^0_\square(t)$ задачи (8). Для $x^0_\square(t)$: $x^0_{\square 1}(4) = 0{,}3845684$; $x^0_{\square 2}(4) = 0{,}2911$ и $\|Hx^0_\square(t^*) - g\| = 0{,}00876493$, $c'x^0(t^*) - c'x^0_\square(t^*) = 0{,}0025626$. Следовательно, управление $u^0_\square(t) = -1$, $t \in [0; 0{,}57]$; $u^0_\square(t) = +1$, $t \in]0{,}57; 4]$ можно взять за приближенное решение задачи (8).

Список литературы

1. Плотников В. А. Асимптотические методы в задачах оптимального управления: Учебное пособие. Одесса, 1976.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1984. Ч. 2.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Минск, 1980. Ч. 3.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 7. С. 596.

Поступила в редакцию 29.11.85.