

В случае а): $J_{\Pi} = (J_{\Pi} \setminus j_*) \cup j_{k_0}$, $J_+ = (J_+ \setminus J_{(*)-}) \cup J_{(*)+} \cup j_*$ при $\mu_* = 1$, $J_+ = (J_+ \setminus J_{(*)-}) \cup J_{(*)+}$ при $\mu_* = -1$.

В случае б): $J_{\Pi} = J_{\Pi} \setminus j_*$, $J_+ = (J_+ \setminus J_{(*)-}) \cup J_{(*)+} \cup j_*$ при $\mu_* = 1$, $J_+ = (J_+ \setminus J_{(*)-}) \cup J_{(*)+}$ при $\mu_* = -1$; $J_{\Pi} = I_{\Pi} \cup i_{k_0}$.

Если $J_{(*)} \neq \emptyset$, $I_{(*)} \neq \emptyset$ и $\gamma(t) < 0$ или $J_{(*)} = \emptyset$, $I_{(*)} = \emptyset$, то положим:

$$J_{(*)+} = \{j \in J_{(*)} : \delta_j > 0\}, J_{(*)-} = \{j \in J_{(*)} : \delta_j < 0\}, \tilde{\gamma}(0) = \gamma(t);$$

$$I_{(*)+} = \{i \in I_{(*)} : \Delta y_i < 0\}, I_{(*)-} = \{i \in I_{(*)} : \Delta y_i > 0\},$$

$$J_+ = (J_+ \setminus J_{(*)-}) \cup J_{(*)+}, I_+ = (I_+ \setminus I_{(*)-}) \cup I_{(*)+}$$

и найдем $\sigma_0 = \min \{\sigma_{j_*}, \sigma_{i_{(*)}}, \sigma_{i_{(*)}}\}$, где $\sigma_{j_*} = -\gamma(0)/H_{\Pi}^{-1}(j_*, j_*)$.

1*). При $\sigma_0 = \sigma_{j_*}$ закончим итерацию построением новой опоры $\tilde{K}_{\text{оп}}$, где $\tilde{J}_{\Pi} = J_{\Pi} \setminus j_*$, $\tilde{J}_+ = J_+ \cup j_*$ при $\mu_* = 1$; $\tilde{J}_+ = J_+$ при $\mu_* = -1$;

2*). При $\sigma_0 = \sigma_{i_{(*)}}$ построим совокупность $\tilde{K}_{\text{оп}}$: $\tilde{J}_{\Pi} = J_{\Pi} \cup j_{(*)}$; $\tilde{J}_+ = J_+ \setminus j_{(*)}$, если $\alpha_{j_{(*)}} \neq 0$; $\tilde{J}_+ = J_+$, если $\alpha_{j_{(*)}} = 0$.

3*). При $\sigma_0 = \sigma_{i_{(*)}}$ построим совокупность $\hat{K}_{\text{оп}}$: $\hat{I}_{\Pi} = I_{\Pi} \cup i_{(*)}$, если $\alpha_{i_{(*)}} \neq 0$; $\hat{I}_{\Pi} = I_{\Pi}$, если $\alpha_{i_{(*)}} = 0$.

В случаях 2*)—3*) повторяем описанные операции по замене опоры, положив $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0) + \sigma_0 H_{\Pi}^{-1}(j_*, j_*)$, $\tilde{\Delta} = (\Delta(J) + \sigma_0 \delta(J), -y(I) - \sigma_0 \Delta y(I))$.

Остальные случаи 2)—4) реализуются по аналогичной схеме.

Теорема. При любых параметрах и любом начальном опорном плане $\{x, K_{\text{оп}}\}$ описанный выше метод решает задачу (1) за конечное число итераций.

Конечный метод решения канонической задачи квадратичного программирования разработан О. И. Костюковой. Настоящая работа является обобщением этого метода для квадратичной задачи с интервальными ограничениями. Автор выражает благодарность О. И. Костюковой за возможность ознакомиться с ее результатами.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1984. Ч. 1: Линейные задачи. С. 9.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 3. С. 1020.

Поступила в редакцию 12.11.85.

УДК 517.984

В. А. ЕРОВЕНКО

О СУЩЕСТВЕННОМ СПЕКТРЕ ФУНКЦИЙ ОТ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $B(X)$ — алгебра всех ограниченных линейных на банаховом пространстве X операторов. Для $T \in B(X)$ через $E(\sigma; T)$, $\pi_{00}(T)$ и $\hat{\pi}_{00}(T)$ обозначим спектральный проектор, соответствующий спектральному множеству σ оператора T , множество изолированных собственных значений конечной геометрической и соответственно алгебраической кратности.

Для оператора $T \in B(X)$ рассмотрим следующие подмножества спектра:

$$\begin{aligned} \sigma_{ef}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin \Phi(X)\}, \\ \sigma_{ew}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin \Phi_0(X)\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Phi(X)$ и $\Phi_0(X)$ — множества фредгольмовых (или нетеровых) и фредгольмовых индекса 0 операторов. Множества $\sigma_{ef}(T)$ и $\sigma_{ew}(T)$ называются соответственно *существенным спектром Вольфа* и *существенным спектром Вейля*. Известно [2], что если λ — изолированная точка спектра $\sigma(T)$, то либо $\dim R[E(\lambda; T)] < \infty$ и $\lambda \notin \sigma_{ew}(T)$, либо $\dim R[E(\lambda; T)] = \infty$ и $\lambda \in \sigma_{ef}(T)$. *Существенный спектр Браудера* $\sigma_{eb}(T)$ определяется как объединение существенного спектра Вейля $\sigma_{ew}(T)$ (1) и множества неизолированных точек из $\sigma(T)$. В частности, отсюда вытекает

$$\sigma_{eb}(T) = \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T).$$

Следуя Кобурну [3], говорят, что для оператора T справедлива *теорема Вейля*, если существенный спектр Вейля $\sigma_{ew}(T)$ совпадает со спектром $\sigma(T)$ за исключением изолированных собственных значений конечной геометрической кратности, т. е.

$$\sigma_{ew}(T) = \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T). \quad (2)$$

Соотношение (2) впервые получено Вейлем для самосопряженных операторов. Теорема Вейля для других классов операторов и существенный спектр Вейля исследовались в [4—11].

Пусть $F(\sigma(T))$ — семейство функций, аналитических в открытой окрестности множества $\sigma(T)$, тогда каждой функции $f \in F(\sigma(T))$ соответствует ограниченный линейный оператор $f(T)$ на X , определяемый интегральной формулой Коши [1]. Если для оператора T справедлива теорема Вейля (2), то возникает вопрос о переносе ее на операторы вида $f(T)$. Исследуем указанную связь.

Теорема 1. Пусть $T \in B(X)$, $f \in F(\sigma(T))$. Если для комплексного числа $\lambda_0 \in \sigma(T)$ $f(\lambda_0) = \mu$ — полюс конечного ранга оператора $f(T)$, то λ_0 — полюс конечного ранга оператора T .

Доказательство. Обозначим через σ следующее подмножество спектра $\sigma = \{\lambda : \lambda \in \sigma(T), f(\lambda) = \mu\}$. Поскольку μ — изолированная точка спектра оператора $f(T)$, то σ — спектральное множество, а спектральные проекторы, связанные со спектральным множеством σ для оператора T и спектральным множеством $\{\mu\}$ для оператора $f(T)$, совпадают, т. е. $E(\sigma; T) = E(\mu; f(T))$ ([1], теорема 19, с. 614). Так как μ , по условию теоремы, полюс конечного ранга оператора $f(T)$, то $R[E(\sigma; T)]$ — конечномерное банахово пространство. В силу того, что T и $E(\sigma; T)$ коммутируют, имеем $T(R[E(\sigma; T)]) \subset R[E(\sigma; T)]$, поэтому можно рассмотреть сужение оператора T на подпространство $R[E(\sigma; T)]$, которое обозначим через $\tilde{T} = T/R[E(\sigma; T)]$. Известно ([1], теорема 20, с. 614), что если $\tilde{T}$ — сужение оператора T на $R[E(\sigma; T)]$, то $\sigma(\tilde{T}) = \sigma$. Более того, спектр оператора $\tilde{T}$ — множество σ конечное, так как пространство $R[E(\sigma; T)]$ конечномерно. Поскольку $\lambda_0 \in \sigma$, то λ_0 — изолированная точка в $\sigma(T)$. Если $E(\lambda_0; T)$ и $E(\sigma \setminus \{\lambda_0\}; T)$ — спектральные проекторы, ассоциированные соответственно со спектральными множествами $\{\lambda_0\}$ и $\sigma \setminus \{\lambda_0\}$, то $E(\sigma; T) = E(\lambda_0; T) + E(\sigma \setminus \{\lambda_0\}; T)$, причем $E(\sigma \setminus \{\lambda_0\}; T)E(\lambda_0; T) = 0$. Отсюда следует, что $R[E(\lambda_0; T)] \subseteq R[E(\sigma; T)]$, поэтому $R[E(\lambda_0; T)]$ конечномерно. Если рассмотреть сужение оператора T на $R[E(\lambda_0; T)]$, то резольвента этого оператора будет иметь в точке λ_0 полюс, следовательно ([1], теорема 20, с. 614), λ_0 — полюс резольвенты $R(\lambda; T)$ оператора T .

А так как $R[E(\lambda_0; T)]$ конечномерно, то $\lambda_0 \in \pi_{00}(T)$ и, следовательно, λ_0 — полюс конечного ранга оператора T . Теорема доказана.

Теорема об отображении спектра справедлива для существенных спектров Вольфа и Браудера [12], т. е. для $T \in B(X)$ и $f \in F(\sigma(T))$

$$\sigma_{ef}(f(T)) = f(\sigma_{ef}(T)), \quad \sigma_{eb}(f(T)) = f(\sigma_{eb}(T)). \quad (3)$$

Теорема об отображении спектра для существенного спектра Вейля, вообще говоря, неверна, однако справедлива

Теорема 2. Пусть $T \in \mathbf{B}(X)$, тогда для любой функции $f \in \mathbf{F}(\sigma(T))$

$$\sigma_{ew}(f(T)) \subseteq f(\sigma_{ew}(T)), \quad (4)$$

$$\sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)) \subseteq f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)), \quad (5)$$

причем включения могут быть собственными.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{R}(\sigma(T))$ множество всех рациональных функций с полюсами вне $\sigma(T)$. По теореме Рунге для любой аналитической функции $f \in \mathbf{F}(\sigma(T))$ найдется последовательность рациональных функций $\{r_n\} \subset \mathbf{R}(\sigma(T))$, которая равномерно сходится $r_n \rightarrow f$ в окрестности множества $\sigma(T)$. Покажем вначале, что формула (4) справедлива для рациональных функций из $\mathbf{R}(\sigma(T))$. Пусть $r \in \mathbf{R}(\sigma(T))$ и $\lambda \notin r(\sigma_{ew}(T))$. Так как

$$r(t) - \lambda = a \prod_{k=1}^n (t - b_k) \prod_{i=1}^m (t - c_i)^{-1}, \quad (6)$$

где $c_i \notin \sigma(T)$, $i = \overline{1, m}$, то $b_k \notin \sigma_{ew}(T)$, поскольку $r(b_k) = \lambda \notin r(\sigma_{ew}(T))$. Следовательно, $\text{ind}(T - b_k I) = 0$, $k = \overline{1, n}$ и

$$\text{ind}(r(T) - \lambda I) = \sum_{k=1}^n \text{ind}(T - b_k I) = 0.$$

Последнее означает, что $\lambda \notin \sigma_{ew}(r(T))$, что доказывает включение

$$\sigma_{ew}(r(T)) \subseteq r(\sigma_{ew}(T)). \quad (7)$$

Пусть последовательность рациональных функций $\{r_n\} \subset \mathbf{R}(\sigma(T))$ равномерно сходится к аналитической функции $f \in \mathbf{F}(\sigma(T))$. В силу того, что $f(T)$ и $r_n(T)$ коммутируют $\lim \sigma_{ew}(r_n(T)) = \sigma_{ew}(f(T))$ ([5], следствие), из соотношения (7) получим включение (4):

$$\sigma_{ew}(f(T)) = \lim \sigma_{ew}(r_n(T)) \subseteq \lim r_n(\sigma_{ew}(T)) = f(\sigma_{ew}(T)).$$

Докажем формулу (5) для рациональных функций $r \in \mathbf{R}(\sigma(T))$. Пусть $\lambda \in \sigma(r(T)) \setminus \pi_{00}(r(T)) = r(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T))$. Если λ — неизолированная точка множества $r(\sigma(T))$, то найдется последовательность $\{\mu_n\} \subset \sigma(T)$ такая, что $r(\mu_n) = \lambda_n \rightarrow \lambda$. В силу компактности $\sigma(T)$ найдется сходящаяся подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\} \subset \{\mu_n\}$, $\mu_{n_k} \rightarrow \mu_0$. Так как μ_0 — неизолированная точка $\sigma(T)$, то $\mu_0 \in \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$ и, следовательно, $\lambda = r(\mu_0) \in r(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T))$. Если λ — изолированная точка множества $\sigma(r(T))$, то либо λ не является собственным значением, либо λ — собственное значение бесконечной кратности. Пусть λ — несобственное значение оператора $r(T)$. Из разложения (6) следует, что все b_k , $k = \overline{1, n}$ не являются собственными значениями оператора T , а так как хотя бы одно из b_k принадлежит $\sigma(T)$, то $\lambda \in r(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T))$. Если λ — собственное значение бесконечной кратности оператора T , принадлежащее поэтому множеству $\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$ и, следовательно, опять $\lambda \in r(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T))$. Если рассмотреть последовательность рациональных функций $r_n \rightarrow f$, то поскольку для коммутирующих операторов $\lim \sigma(r_n(T)) = \sigma(f(T))$, а отображение $T \rightarrow \pi_{00}(T)$ непрерывно, получим

$$\begin{aligned} \sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)) &= \lim \sigma(r_n(T)) \setminus \pi_{00}(r_n(T)) \subseteq \\ &\subseteq \lim r_n(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) = f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)). \end{aligned}$$

Для доказательства того, что включения (4), (5) собственные, достаточно показать на примерах, что обратные включения могут не выполняться даже для полиномов. Для первого соотношения контрпример строится с помощью оператора $T = U + (U^* + 2I)$ на $X = l^2 \dot{+} l^2$, где U — односторонний сдвиг $Ue_n = e_{n+1}$, и $p(t) = t(t - 2)$ [4]. Действитель-

но $T, T-2I \in \Phi(X)$ и $\text{ind}(T) = -1, \text{ind}(T-2I) = 1$, поэтому $T(T-2I) \in \Phi_0(X)$, т. е. $0 \notin \sigma_{ew}(p(T))$, однако $0 = p(0) \in p(\sigma_{ew}(T))$.

Для второго контрпримера рассмотрим оператор, описанный в работе [6]. Пусть $T = T_1 + (T_2 - I)$ в $X = l^2 + l^2$, где $T_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, 0, x_2/2, x_3/3, \dots)$, $T_2(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1/2, x_2/3, \dots)$ и $p(t) = t^2$. Тогда $\sigma(T) = \{-1\} \cup \{\lambda: |\lambda| \leq 1/2\} \cup \{1\}$, $\pi_{00}(T) = \{1\}$, следовательно, $1 \in p(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T))$, хотя $1 \notin \sigma(p(T)) \setminus \pi_{00}(p(T))$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В работах [4—6] включения (4)—(5) доказаны для полиномов. Однако воспользоваться предельным переходом в этих соотношениях нельзя, так как аналитические функции, вообще говоря, не аппроксимируются полиномами в некоторой области, если последняя не является односвязной.

Предложение 1. Если для оператора $T \in B(X)$ существенные спектры Вольфа и Вейля совпадают, $\sigma_{ew}(T) = \sigma_{ef}(T)$, то для оператора T справедлива теорема об отображении существенного спектра Вейля, т. е. для любой аналитической функции $f \in F(\sigma(T))$

$$\sigma_{ew}(f(T)) = f(\sigma_{ew}(T)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что существенные спектры Вольфа и Вейля для оператора $f(T)$ совпадают. По теореме 2 и теореме об отображении существенного спектра Вольфа получим

$$\sigma_{ew}(f(T)) \subseteq f(\sigma_{ew}(T)) = f(\sigma_{ef}(T)) = \sigma_{ef}(f(T)).$$

Поскольку $\sigma_{ef}(f(T)) \subseteq \sigma_{ew}(f(T))$, то из предыдущего соотношения следует, что $\sigma_{ew}(f(T)) = \sigma_{ef}(f(T))$. Таким образом, доказано равенство $\sigma_{ew}(f(T)) = f(\sigma_{ew}(T))$.

Теорема 3. Если для $T \in B(X)$ и $f \in F(\sigma(T))$ выполняется равенство $\pi_{00}(f(T)) = \pi_{00}(f(T))$, то тогда

$$f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) = \sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 2 достаточно показать, что имеет место включение $f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) \subseteq \sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T))$. Пусть $\mu \in f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T))$, тогда по теореме об отображении спектра $\mu \in \sigma(f(T))$. Предположим, что $\mu \notin \sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T))$, т. е. $\mu \in \pi_{00}(f(T))$. Рассмотрим все $\lambda \in \sigma(T)$, для которых $f(\lambda) = \mu$. По условию теоремы μ — полюс конечного ранга оператора $f(T)$, следовательно, по теореме 1 указанные $\lambda \in \pi_{00}(T) \subset \pi_{00}(T)$. Это противоречит тому, что $\mu \in f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T))$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Предложение 2. Пусть $T \in B(X)$ и $f \in F(\sigma(T))$. Если для оператора $f(T)$ справедлива теорема Вейля, то тогда выполняются равенства:

$$f(\sigma_{ew}(T)) = \sigma_{ew}(f(T)) \text{ и } \pi_{00}(f(T)) = \hat{\pi}_{00}(f(T)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 2 следует, что достаточно доказать справедливость включения $f(\sigma_{ew}(T)) \subseteq \sigma_{ew}(f(T))$. Если оператор $f(T)$ удовлетворяет теореме Вейля, то известно [13], что существенные спектры Вейля и Браудера совпадают: $\sigma_{ew}(f(T)) = \sigma_{eb}(f(T))$ и, кроме того, $\pi_{00}(f(T)) = \hat{\pi}_{00}(f(T))$. Пусть $\mu \in \sigma(f(T)) \setminus \sigma_{ew}(f(T))$, в силу сделанных предположений, $\mu \in \pi_{00}(f(T))$, отсюда следует, что μ — полюс конечного ранга оператора $f(T)$. Так как $\mu \in f(\sigma(T))$, то найдутся точки $\lambda \in \sigma(T)$ такие, что $f(\lambda) = \mu$. По теореме 1 каждая из указанных точек $\lambda \in \pi_{00}(T)$. Следовательно, $\lambda \notin \sigma_{eb}(T)$ и, в частности, $\lambda \notin \sigma_{ew}(T)$, поэтому $\mu = f(\lambda) \notin f(\sigma_{ew}(T))$. Таким образом, $f(\sigma_{ew}(T)) \subseteq \sigma_{ew}(f(T))$, и предложение доказано.

Теорема 4. Пусть для оператора $T \in B(X)$ справедлива теорема Вейля. Тогда оператор $f(T)$, $f \in F(\sigma(T))$, удовлетворяет теореме Вейля тогда и только тогда, когда

$$f(\sigma_{ew}(T)) = \sigma_{ew}(f(T)) \text{ и } \pi_{00}(f(T)) = \hat{\pi}_{00}(f(T)).$$

Доказательство. Необходимость следует из предложения 2, а достаточность непосредственно вытекает из теоремы 3 и формулы (2), так как из равенств $f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) = \sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T))$ и $\sigma_{ew}(T) = \sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)$ находим, что $f(\sigma_{ew}(T)) = \sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T))$, откуда получаем необходимое утверждение.

З а м е ч а н и е 2. Для оператора T из второго контрпримера в доказательстве теоремы 2 $\sigma_{ew}(T) = \{-1\} \cup \{\lambda: |\lambda| \leq 1/2\}$ и поэтому теорема Вейля для оператора T верна. Однако, хотя $p(\sigma_{ew}(T)) = \sigma_{ew}(p(T))$ для $p(t) = t^2$, где $\sigma_{ew}(p(T)) = \{\lambda: |\lambda| \leq 1/4\} \cup \{1\}$, теорема Вейля для оператора $p(T)$ не выполняется. Заметим, что точка $1 \in \pi_{00}(p(T))$ не является полюсом конечного ранга и, следовательно, условие теоремы $\pi_{00}(p(T)) = \bigwedge = \pi_{00}(p(T))$ не выполнено.

В работе [6] показано, что если у оператора $T \in B(X)$ любая изолированная точка спектра является его собственным значением и оператор удовлетворяет теореме Вейля, то теорема Вейля справедлива для оператора $p(T)$, где p — полином, тогда и только тогда, когда $p(\sigma_{ew}(T)) = \sigma_{ew}(p(T))$.

Список литературы

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. М., 1962. Т. 1.
2. Milicic D., Veselic K. // Glas. mat. 1971. V. 6. N 1. P. 73.
3. Coburn L. A. // Michigan Math. J. 1966. V. 13. P. 285.
4. Berberian S. K. // Indiana Univ. Math. J. 1970. V. 20. N 4. P. 529.
5. Oberai K. K. // Ill. J. Math. 1974. V. 18. N 2. P. 208.
6. Oberai K. K. // Ibid. 1977. V. 21. N 1. P. 84.
7. Еровенко В. А. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 7. С. 592.
8. Еровенко В. А. // Там же. 1984. Т. 28. № 12. С. 1068.
9. Еровенко В. А. // Там же. 1985. Т. 29. № 11. С. 969.
10. Еровенко В. А. // Там же. 1986. Т. 30. № 4. С. 301.
11. Еровенко В. А. // Там же. 1986. Т. 30. № 8. С. 681.
12. Gramsch B., Lay D. // Math. Ann. 1971. V. 192. N 1. P. 17.
13. Gustafson K. // Indiana Univ. Math. J. 1976. V. 25. N 8. P. 769.

Поступила в редакцию 29.11.85.

УДК 519.852

В. В. КРАХОТКО, В. В. ПАВЛОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С БЫСТРОМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается алгоритм решения задачи оптимизации линейной нестационарной системы, основанный на применении метода усреднения [1] и использовании метода опорных задач [2—4].

1. Постановка задачи. Основные результаты. Пусть дана следующая задача:

$$I(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = Ax + b(t)u, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$Hx(t^*) = g, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t^*], \quad (2)$$

где A, H — постоянные $n \times n$ и $m \times n$ -матрицы; $b(t)$, $t \in T$ — μ -периодическая непрерывная n -вектор-функция (μ — малый параметр; $\mu > 0$); c и g — постоянные n , m -векторы.

Управление $u = (u(t), t \in T)$ назовем допустимым, если $u(t)$, $t \in T$ — кусочно-постоянная функция и если оно вместе с соответствующей ему траекторией $x(t)$, $t \in T$ системы (1) удовлетворяет ограничениям (2).

Применив к системе (1) метод усреднения [1], получим задачу оптимизации линейной стационарной системы с континуумом входов:

$$c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = Ax + \frac{1}{\mu} \int_0^\mu b(\omega) u(t, \omega) d\omega, \quad (3)$$