При этом компоненты напряжений на вещественной оси вне разреза определяются выражениями:

$$\sigma_x^- = 2\Psi_{01} + \alpha_1 T^-, \; \sigma_x^+ = 2\Psi_{01} + \alpha_1 T^+, \; T^- = T^+ = T(x, 0, \tau),$$

$$T(x, 0, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}k}\int_0^\tau \frac{q(\tau-u)}{\sqrt{u}} e^{-\varkappa_1^2 u}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{u}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{u}}\right)\right] du.$$

Список литературы

1. Гайвась И. В., Кит Г. С. // Проблемы прочности. 1974. № 6. С. 72.
2. Кит Г. С., Побережный О. В. // Физ.-хим. механика материалов. 1976. Т. 12. № 4. С. 73.
3. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Минск, 1972.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
5. Каретко Н. П. // Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1985. Вып. 12.

Поступила в редакцию 06.06.85.

УДК 519.233.2

Д. В. СИНЬКЕВИЧ, Н. Н. ТРУШ

О РЕЗУЛЬТАТАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МОМЕНТОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ АГРЕГИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

Пусть имеется закрытая система из N индивидуумов, распределенных по r категориям $s_1, s_2, \ldots, s_r$, и временной ряд агрегированных наблюдений $y_{i,\tau}$, $i = \overline{1, r}$, $\tau = \overline{0, T}$ за ее структурным состоянием, где наблюдения $y_{i,\tau}$ удовлетворяют следующим условиям: $0 \leqslant y_{i,\tau} \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{r} y_{i,\tau} = 1$ для любых $\tau = \overline{0, T}$.

Математической моделью эволюции каждого из N элементов системы служит однородная, конечного числа состояний марковская цепь с одной и той же матрицей переходных вероятностей $P = \|p_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, r}$, причем все N марковских цепей независимы.

При этих предположениях, рассматривая в качестве линейной статистической модели уравнение $y_{j,\tau} = \sum_{i=1}^{r} y_{i,\tau-1}p_{ij} + u_{j,\tau}$, $j = \overline{1, r}$, $\tau = \overline{1, T}$, получили различные оценки переходных вероятностей p_{ij}, $i, j = \overline{1, r}$ [1—6]. При исследовании некоторых асимптотических свойств оценок в этих работах широко используется результат, доказанный Маданским [3]. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 1. Для любых $i, j = \overline{1, r}$, $\tau = \overline{0, T}$, неотрицательного целого n такого, что $\tau - n \geqslant 0$, имеет место равенство $\operatorname{cov}(y_{i,\tau}; y_{j,\tau-n}) = N^{-1} \cdot q_{j,\tau-n}(p_{ji}^{(n)} - q_{i,\tau})$, где $q_{l,\Theta} = My_{l,\Theta}$, $l = \overline{1, r}$, $\Theta = \overline{0, T}$, а $p_{ji}^{(n)}$ — переходная вероятность из состояния s_j в состояние s_l за n шагов.

В работах [3, 5] приведены многие интересные следствия из этой леммы. Однако при детальном исследовании асимптотических свойств оценок переходных вероятностей, в частности при оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме, их оказывается недостаточно [7—8]. Поэтому, используя предложенный Маданским [3] подход, докажем ряд лемм для третьих и четвертых моментов случайных величин $y_{i,\tau}$, $u_{j,\Theta}$, $i, j = \overline{1, r}$, $\tau, \Theta = \overline{0, T}$.

Лемма 2. Для любых неотрицательных целых τ, s таких, что $\tau = \overline{0, T}$, $\tau \geqslant s$ и $i, j = \overline{1, r}$, имеет место равенство

$$My^2_{j,\,\tau-s}\,y^2_{i,\,\tau}=\left(1-\frac{6}{N}+\frac{11}{N^2}-\frac{6}{N^3}\right)q^2_{j,\,\tau-s}\,q^2_{i,\,\tau}+\left(\frac{1}{N}-\frac{3}{N^2}+\frac{2}{N^3}\right)\times$$

$$\times\, q_{j,\,\tau-s}\,q_{i,\,\tau}\,(q_{i,\,\tau}+q_{j,\,\tau-s}+4q_{j,\,\tau-s}\,p^{(s)}_{i\,\tau})+\left(\frac{1}{N^2}-\frac{1}{N^3}\right)q_{j,\,\tau-s}\,(q_{i,\,\tau}+$$

$$+\,2q_{j,\,\tau-s}\,p^{(s)}_{ji}+2q_{i,\,\tau}\,p^{(s)}_{ji}+2q_{j,\,\tau-s}\,p^{2(s)}_{ji})+\frac{1}{N^3}\,q_{j,\,\tau-s}\,p^{(s)}_{ji}.$$

Доказательство. Представим случайную величину $y_{i,\,\tau}$, $i=\overline{1,\,r}$, $\tau=\overline{0,\,T}$ следующим образом;

$$y_{i,\,\tau}=N^{-1}\sum_{k=1}^{N}Y_{i\tau k},\tag{1}$$

где $Y_{i\tau k}=1$, если индивидуум k находится в состоянии s_i в момент времени τ, и равно 0 в противном случае. Тогда

$$My^2_{j,\,\tau-s}\,y^2_{i,\,\tau}=N^{-4}\Big[M\sum_{\nu,\,\mu=1}^{N}Y^2_{j(\tau-s)\nu}Y^2_{i\tau\mu}+2M\sum_{\nu=1}^{N-1}\sum_{l=\nu+1}^{N}\sum_{\mu=1}^{N}Y_{j\,(\tau-s)\nu}\times$$

$$\times\, Y_{j(\tau-s)l}\,Y^2_{i\tau\mu}+2M\sum_{\mu=1}^{N-1}\sum_{k=\mu+1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N}Y_{i\tau\mu}Y_{i\tau k}Y^2_{j(\tau-s)\nu}+4M\sum_{\nu,\,\mu=1}^{N}\sum_{l=\nu+1}^{N}\sum_{k=\mu+1}^{N}\times$$

$$\times\, Y_{j(\tau-s)\,\nu}Y_{j\,(\tau-s)\,l}\,Y_{i\tau k}\,Y_{i\tau\mu}\Big]=N^{-4}\,(B_1+B_2+B_3+B_4).$$

Рассмотрим каждое из полученных слагаемых.

$$B_1=\sum_{\nu,\,\mu=1}^{N}P\,(Y_{j\,(\tau-s)\nu}=1;\;Y_{i\tau\mu}=1)=\sum_{\nu,\,\mu=1}^{N}P\,(Y_{i\tau\mu}=1\,|\,Y_{j(\tau-s)\,\nu}=1)\times$$

$$\times\, q_{j,\,\tau-s}=\sum_{\nu=1}^{N}q_{j,\,\tau-s}\,p^{(s)}_{ji}+\sum_{\nu=1}^{N-1}\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{N}q_{j,\,\tau-s}\,q_{i,\,\tau}=Nq_{j,\,\tau-s}\,p^{(s)}_{ji}+$$

$$+\,(N^2-N)q_{j,\,\tau-s}\,q_{i,\,\tau}.$$

$$B_2=2\sum_{\nu=1}^{N-1}\sum_{l=\nu+1}^{N}\sum_{\mu=1}^{N}P\,(Y_{j(\tau-s)\nu}=1;\;Y_{j(\tau-s)l}=1;\;Y^2_{i\tau\mu}=1)=$$

$$=2\Big[\sum_{\nu=1}^{N-1}\sum_{l=\nu+1}^{N}\sum_{\mu=1}^{N}P\,(Y^2_{i\tau\mu}=1;\;Y_{j(\tau-s)\nu}=1/Y_{j\,(\tau-s)l}=1)\Big]q_{j,\,\tau-s}=$$

$$=(N^3-3N^2+2N)\,q^2_{j,\,\tau-s}\,q_{i,\,\tau}+2(N^2-N)\,q^2_{j,\,\tau-s}\,p^{(s)}_{ji}.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$B_3=(N^3-3N^2+2N)\,q_{j,\,\tau-s}\,q^2_{i,\,\tau}+2\,(N^2-N)\,q_{i,\,\tau}\,q_{j,\,\tau-s}\,p^{(s)}_{ji},$$

а также

$$B_4=(N^3-3N^2+2N)\,q_{j,\,\tau-s}\,q^2_{i,\,\tau}+4\,(N-2)\,(N-1)\,N\,q^2_{j,\,\tau-s}\times$$

$$\times\, q_{i,\,\tau}\,p^{(s)}_{ji}+2N\,(N-1)\,q^2_{j,\,\tau-s}\,p^{2\,(s)}_{ji}.$$

Просуммировав полученные выражения и разделив на N^4, получим утверждение леммы 2. Лемма 2 доказана.

При доказательстве лемм 3, 4, 5 воспользуемся представлением (1) и проведем его аналогично доказательству леммы 2.

Лемма 3. Для любых неотрицательных целых τ, s таких, что $\tau=\overline{1,\,T}$, $\tau-s\geqslant 0$ и $i,\ j,\ l=\overline{1,\,r}$, имеет место следующее равенство:

$$My^2_{j,\,\tau-s}\,y_{l,\,\tau-s}\,y_{i,\,\tau}=\left(1-\frac{6}{N}+\frac{11}{N^2}-\frac{6}{N^3}\right)q^2_{j,\,\tau-s}\,q_{l,\,\tau-s}\,q_{i,\,\tau}+$$

$$+\left(\frac{1}{N}-\frac{3}{N^2}+\frac{2}{N^3}\right)q_{j,\,\tau-s}\,(q_{l,\,\tau-s}\,q_{i,\,\tau}+2q_{l,\,\tau-s}\,q_{j,\,\tau-s}\,p^{(s)}_{ji}+q_{j,\,\tau-s}\,q_{l,\,\tau-s}\times$$

$$\times p_{li}^{(s)} + 2q_{j,\,\tau-s}\,q_{l,\,\tau}p_{jl}^{(0)}) + \left(\frac{1}{N^2} - \frac{1}{N^3}\right)(q_{j,\,\tau-s}\,q_{l,\,\tau-s}\,p_{ji}^{(s)} + q_{l,\,\tau-s}\,q_{j,\,\tau-s} \times$$

$$\times p_{li}^{(s)} + q_{i,\,\tau}\,q_{j,\,\tau-s}\,p_{jl}^{(0)} + 4q_{j,\,\tau-s}^2\,p_{ji}^{(s)}\,p_{jl}^{(0)}) + \frac{1}{N^3}\,q_{j,\,\tau-s}^2\,p_{ji}^{(s)}\,p_{jl}^{(0)},$$

где $p_{jl}^{(0)} = \begin{cases} 1, & j = l, \\ 0, & j \neq l. \end{cases}$

Лемма 4. Для любых $i,\ j,\ l = \overline{1,\ r}$; $\tau = \overline{1,\ T}$ и неотрицательных целых Θ, s таких, что $\tau \geqslant \Theta \geqslant s$, выполняется равенство

$$My_{j,\,\tau}\,y_{i,\,\tau-s}\,y_{l,\,\tau-\Theta} = \left(1 - \frac{3}{N} + \frac{2}{N^2}\right)q_{l,\,\tau-\Theta}\,q_{i,\,\tau-s}\,q_{j,\,\tau} + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right) \times$$

$$\times q_{l,\,\tau-\Theta}\,(q_{i,\,\tau-s}\,p_{lj}^{(\Theta)} + q_{j,\,\tau}\,p_{li}^{(\Theta-s)} + q_{i,\,\tau-s}\,p_{ij}^{(s)}) + \frac{1}{N^2}\,q_{l,\,\tau-\Theta}\,p_{ij}^{(s)}\,p_{li}^{(\Theta-s)}.$$

Лемма 5. Для любых неотрицательных целых s, Θ, φ таких, что $\varphi \geqslant \Theta \geqslant s$ и любых $i,\ j,\ k,\ l = \overline{1,\ r}$; $\tau = \overline{1,\ T}$, имеет место равенство

$$M\,y_{i,\,\tau}\,y_{j\ \ \tau+s}\,y_{k,\,\tau+\Theta}\,y_{l,\,\tau+\varphi} = \left(1 - \frac{6}{N} + \frac{11}{N^2} - \frac{6}{N^3}\right)q_{i,\,\tau}\,q_{j,\,\tau+s}\,q_{k,\,\tau+\Theta}\,q_{l,\,\tau+\varphi} +$$

$$+ \left(\frac{1}{N} - \frac{3}{N^2} + \frac{2}{N^3}\right)q_{i,\,\tau}\,(q_{k,\,\tau+\Theta}\,(q_{l,\,\tau+\varphi}\,p_{ij}^{(s)} + q_{j,\,\tau+s}\,p_{il}^{(\varphi)}) + q_{j,\,\tau+s} \times$$

$$\times (q_{k,\,\tau+\Theta}\,p_{jl}^{(\varphi-s)} + q_{l,\,\tau+\varphi}\,p_{jk}^{(\Theta-s)}) + q_{j,\,\tau+s}\,(q_{l,\,\tau+\varphi}\,p_{ik}^{(\Theta)} + q_{k,\,\tau+\Theta}\,p_{kl}^{(\varphi-\Theta)})) +$$

$$+ \left(\frac{1}{N^2} - \frac{1}{N^3}\right)q_{i,\,\tau}\,(q_{l,\,\tau+\varphi}\,p_{ij}^{(s)}\,p_{jk}^{(\Theta-s)} + q_{k,\,\tau+\Theta}\,p_{ij}^{(s)}\,(p_{jl}^{(\varphi-s)} + p_{kl}^{(\varphi-\Theta)}) +$$

$$+ q_{j,\,\tau+s}(p_{il}^{(\varphi)}p_{jk}^{(\Theta-s)} + p_{ik}^{(\Theta)}\,p_{jl}^{(\varphi-s)}) + q_{j,\,\tau+s}\,p_{kl}^{(\varphi-\Theta)}\,(p_{jk}^{(\Theta-s)} + p_{ik}^{(\Theta)})) +$$

$$+ \frac{1}{N^3}\,q_{i,\,\tau}\,p_{ij}^{(s)}\,p_{jk}^{(\Theta-s)}\,p_{kl}^{(\varphi-\Theta)}.$$

Лемма 6. Для любых $i,\ j = \overline{1,\ r}$; $\tau = \overline{1,\ T}$ имеет место равенство

$$My_{j,\,\tau-1}^2\,u_{i,\,\tau}^2 = \left(\frac{1}{N} - \frac{3}{N^2} + \frac{2}{N^3}\right)q_{j,\,\tau-1}^2\,(q_{i,\,\tau} - \sum_{l=1}^{r} q_{l,\,\tau-1}\,p_{li}^2) +$$

$$+ \left(\frac{1}{N^2} - \frac{1}{N^3}\right)q_{j,\,\tau-1}\,(2q_{j,\,\tau-1}\,p_{ji} - 2q_{j,\,\tau-1}p_{ji}^2 + q_{i,\,\tau} - \sum_{l=1}^{r} q_{l,\,\tau-1}\,p_{li}^2) +$$

$$+ \frac{1}{N^3}\,q_{j,\,\tau-1}\,(p_{ji} - p_{ji}^2).$$

Доказательство. Из рассматриваемой линейной статистической модели имеем, что $u_{i,\,\tau} = y_{i,\,\tau} - \sum_{l=1}^{r} y_{l,\,\tau-1}\,p_{li}$, $i = \overline{1,\ r}$. Тогда для $y_{j,\,\tau-1}^2 \times u_{i,\,\tau}^2$ получаем следующее представление:

$$y_{j,\,\tau-1}^2\,u_{i,\,\tau}^2 = y_{j,\,\tau-1}^2\left(y_{i,\,\tau}^2 - 2y_{i,\,\tau}\sum_{l=1}^{r} y_{l,\,\tau-1}\,p_{li} + \sum_{l=1}^{r} y_{l,\,\tau-1}^2\,p_{li}^2 + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{l=1}^{r-1}\sum_{k=l+1}^{r} y_{l,\,\tau-1}\,y_{k,\,\tau-1}\,p_{li}\,p_{ki}\right).$$

Далее, согласно уравнению Колмогорова — Чепмена, получим, что

$$\sum_{l=1}^{r} p_{il}^{(s)}\,p_{lj}^{(m)} = p_{ij}^{(s+m)}, \tag{2}$$

где $i,\ j = \overline{1,\ r}$; s, m — любые неотрицательные целые числа. Из условия марковости цепи имеем, что

$$q_{j,\tau}=\sum_{i=1}^{r} q_{i,\tau-1}\, p_{ij},\quad j=\overline{1,\ r};\ \tau=\overline{1,\ T}. \tag{3}$$

Применяя леммы 2, 3 и формулы (2)—(3), убеждаемся в верности утверждения леммы 6. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Для любых $i,\ j,\ k,\ l=\overline{1,\ r}$; $\tau=\overline{0,\ T}$ и любых натуральных $\varphi,\ \Theta,\ s$ таких, что $\varphi>\Theta\geqslant s$, имеет место равенство

$$My_{i,\tau}\, u_{j,\tau+s}\, y_{k,\tau+\Theta}\, u_{l,\tau+\varphi}=0.$$

Доказательство. Как было отмечено выше, $u_{j,\tau}=y_{j,\tau}-\sum_{i=1}^{r}\times$ $\times\, y_{i,\tau-1}\, p_{ij}$ для любых $j=\overline{1,\ r}$; $\tau=\overline{1,\ T}$. Тогда получаем, что

$$My_{i,\tau}\, u_{j,\tau+s}\, y_{k,\tau+\Theta}\, u_{l,\tau+\varphi}=My_{i,\tau}y_{j,\tau+s}y_{k,\tau+\Theta}y_{l,\tau+\varphi}-\sum_{j_1=1}^{r} p_{j_1 j}\, My_{i,\tau}y_{j_1,\tau+s-1}\times$$

$$\times\, y_{k,\tau+\Theta}\, y_{l,\tau+\varphi}-\sum_{l_1=1}^{r} p_{l_1 l}\, M\, y_{i,\tau}\, y_{j,\tau+s}\, y_{k,\tau+\Theta}\, y_{l_1,\tau+\varphi-1}+$$

$$+\sum_{j_1,\ l_1=1}^{r} p_{j_1 j}\, p_{l_1 l}\, M\, y_{i,\tau}\, y_{j_1,\tau+s-1}\, y_{k,\tau+\Theta}\, y_{l_1,\tau+\varphi-1}=B_1-B_2-B_3+B_4.$$

Применяя для вычисления B_1 лемму 5, получаем следующее равенство:

$$B_1=\left(1-\frac{6}{N}+\frac{11}{N^2}-\frac{6}{N^3}\right) q_{i,\tau}\, q_{j,\tau+s}\, q_{k,\tau+\Theta}\, q_{l,\tau+\varphi}+\left(\frac{1}{N}-\frac{3}{N^2}+\frac{2}{N^3}\right)\times$$

$$\times\, q_{i,\tau}\, (q_{k,\tau+\Theta}\, (q_{l,\tau+\varphi}\, p_{ij}^{(s)}+q_{j,\tau+s}\, p_{il}^{(\varphi)})+q_{j,\tau+s}\, (q_{k,\tau+\Theta}\, p_{jl}^{(\varphi-s)}+$$

$$+\, q_{l,\tau+\varphi}\, p_{jk}^{(\Theta-s)})+q_{j,\tau+s}\, (q_{l,\tau+\varphi}\, p_{ik}^{(\Theta)}+q_{k,\tau+\Theta}\, p_{kl}^{(\varphi-\Theta)}))+$$

$$+\left(\frac{1}{N^2}-\frac{1}{N^3}\right) q_{i,\tau}\, (q_{l,\tau+\varphi}\, p_{ij}^{(s)}\, p_{jk}^{(\Theta-s)}+p_{ij}^{(s)}\, q_{k,\tau+\Theta}\, (p_{jl}^{(\varphi-s)}+p_{kl}^{(\varphi-\Theta)})+$$

$$+\, q_{j,\tau+s}\, (p_{il}^{(\varphi)}\, p_{jk}^{(\Theta-s)}+p_{ik}^{(\Theta)}\, p_{jl}^{(\varphi-s)})+q_{j,\tau+s}\, p_{kl}^{(\varphi-\Theta)}\, (p_{jk}^{(\Theta-s)}+p_{ik}^{(\Theta)}))+$$

$$+\, \frac{1}{N^3}\, q_{i,\tau}\, p_{ij}^{(s)}\, p_{jk}^{(\Theta-s)}\, p_{kl}^{(\varphi-\Theta)}.$$

Применяя лемму 5, формулы (2) и (3), получаем для суммы B_3 точно такое же равенство, как и для B_1. Применяя лемму 5, формулы (2) и (3), имеем $B_2=B_4$. Подставляя найденные выражения в правую часть исходной формулы для $My_i,\ \tau u_{j,\tau+s}y_{k,\tau+\Theta}u_{l,\tau+\varphi}$, получаем утверждение леммы 7. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Для любых натуральных $\Theta,\ s,\ \varphi$ таких, что $s\leqslant\Theta\leqslant\varphi$ и любых $\tau=\overline{1,\ T}$; $i,\ j,\ l,\ k=\overline{1,\ r}$, имеет место равенство:

$$Mu_{i,\tau}\, u_{j,\tau+s}\, y_{k,\tau+\Theta}\, y_{l,\tau+\varphi}=\left(\frac{1}{N^2}-\frac{1}{N^3}\right)(q_{i,\tau}\, p_{ij}^{(s)}\, (q_{l,\tau+\varphi}\, p_{jk}^{(\Theta-s)}+$$

$$+\, q_{k,\tau+\Theta}\, p_{jl}^{(\varphi-s)})+q_{i,\tau}\, q_{j,\tau+s}\, (p_{il}^{(\varphi)}\, p_{jk}^{(\Theta-s)}+p_{ik}^{(\Theta)}\, p_{jl}^{(\varphi-s)})-p_{jk}^{(\Theta-s)}\times$$

$$\times\, (q_{l,\tau+\varphi}\sum_{\nu=1}^{r} p_{\nu i}\, q_{\nu,\tau-1}\, p_{\nu j}^{(s+1)}+q_{j,\tau+s}\sum_{\nu=1}^{r} p_{\nu i}\, q_{\nu,\tau-1}\, p_{\nu l}^{(\varphi-1)})-$$

$$-\, q_{k,\tau+\Theta}\, (p_{jl}^{(\varphi-s)}+p_{kl}^{(\varphi-\Theta)})\sum_{\nu=1}^{r} p_{\nu i}\, p_{\nu j}^{(s+1)}\, q_{\nu,\tau-1}-q_{j,\tau+s}\, p_{jl}^{(\varphi-s)}\sum_{\nu=1}^{r} p_{\nu i}\, q_{\nu,\tau-1}\times$$

$$\times\, p_{\nu k}^{(\Theta+1)}-q_{i,\tau}\, (p_{kl}^{(\varphi-\Theta)}+p_{il}^{(\varphi)})\sum_{m=1}^{r} p_{mj}\, q_{m,\tau+s-1}\, p_{mk}^{(\Theta-s+1)}-q_{i,\tau}\, q_{l,\tau+\varphi}\times$$

$$\times \sum_{m=1}^{r} p_{mj}\, p_{im}^{(s-1)}\, p_{mk}^{(\Theta-s+1)} + q_{k,\,\tau+\Theta} \sum_{m=1}^{r} p_{mj}\, p_{im}^{(s-1)}\, p_{ml}^{(\varphi-s+1)} +$$

$$+ p_{ik}^{(\Theta)} \sum_{m=1}^{r} q_{m,\,\tau+s-1}\, p_{mj}\, p_{ml}^{(\varphi-s+1)} + q_{l,\,\tau+\varphi} \sum_{\nu,\,m=1}^{r} q_{m,\,\tau+s-1}\, q_{\nu,\,\tau-1}\, p_{\nu i}\, p_{\nu l}^{(\varphi+1)} \times$$

$$\times p_{mk}^{(\Theta-s+1} + q_{k,\,\tau+\Theta} \sum_{\nu,\,m=1}^{r} q_{\nu,\,\tau-1}\, p_{\nu i}\, p_{mj}\, p_{\nu m}^{(s)}\, p_{ml}^{(\varphi-s+1)} + q_{i,\,\tau}\, p_{kl}^{(\varphi-\Theta)} \sum_{m=1}^{r} \times$$

$$\times p_{mj}\, q_{m,\,\tau+s-1}\, p_{mk}^{(\Theta-s+1)} + \sum_{\nu,\,m=1}^{r} q_{m,\,\tau+s-1}\, q_{\nu,\,\tau-1}\, p_{mj}\, p_{\nu i} \left(p_{\nu l}^{(\varphi+1)}\, p_{mk}^{(\Theta-s+1)} +\right.$$

$$\left. + p_{\nu k}^{(\Theta+1)} p_{ml}^{(\varphi-s+1)}\right)) + \frac{1}{N^3} \left(q_{i,\,\tau}\, p_{ij}^{(s)}\, p_{jk}^{(\Theta-s)}\, p_{kl}^{(\varphi-\Theta)} - p_{jk}^{(\Theta-s)}\, p_{kl}^{(\varphi-\Theta)} \sum_{\nu=1}^{r} q_{\nu,\,\tau-1} \times\right.$$

$$\times p_{\nu i}\, p_{\nu j}^{(s+1)} - q_{i,\,\tau} p_{kl}^{(\varphi-\Theta)} \sum_{m=1}^{r} p_{mj}\, p_{im}^{(s-1)}\, p_{mk}^{(\Theta-s+1)} + p_{kl}^{(\varphi-\Theta)} \times$$

$$\times \sum_{\nu,\,m=1}^{r} q_{\nu,\,\tau-1}\, p_{\nu i}\, p_{mj}\, p_{\nu m}^{(s)}\, p_{mk}^{(\Theta-s+1)}.$$

Доказательство. Как известно, $u_{i,\,\tau} = y_{i,\,\tau} - \sum_{\nu=1}^{r} y_{\nu,\,\tau-1}\, p_{\nu i}$, $i = \overline{1,\, r}$; $\tau = \overline{1,\, T}$. Отсюда получаем:

$$M u_{i,\,\tau}\, u_{j,\,\tau+s}\, y_{k,\,\tau+\Theta}\, y_{l,\,\tau+\varphi} = M \left(y_{i\,\,\tau} - \sum_{\nu=1}^{r} y_{\nu,\,\tau-1}\, p_{\nu i}\right) \times$$

$$\times \left(y_{j,\,\tau+s} - \sum_{m=1}^{r} y_{m,\,\tau+s-1}\, p_{mj}\right) y_{k,\,\tau+\Theta}\, y_{l,\,\tau+\varphi}.$$

Перемножим выражения в правой части последнего соотношения, а затем применим лемму 5 к каждому полученному слагаемому. Суммируя полученные результаты с соответствующими знаками, имеем утверждение леммы 8. Лемма 8 доказана.

Список литературы

1. Anderson T. W., Goodman L. A. // Annals of Mathematical Statistics. 1957. V. 28. P. 89.
2. Ли Ц., Джадж Д., Зельнер А. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам. М., 1977.
3. Madansky A. // Psychometrica. 1959. V. 24. P. 137.
4. Miller G. A. // Psychometrica. 1952. V. 17. P. 149.
5. Синькевич Д. В. Сравнительный анализ оценок переходных вероятностей однородной марковской цепи по методу наименьших квадратов и методу перекрывающихся временных интервалов / Редкол. ж. Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. Минск, 1982. 21 с. Деп. в ВИНИТИ 06.04.82. № 1631-82.
6. Синькевич Д. В. // Статистические методы. Пермь, 1984. С. 129.
7. Давыдов Ю. А. // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. № 2. С. 252.
8. Statulevicius V. // Proc. Int. Congr. Math. Vancouver. 1974. V. 2. S. 1. P. 173.

Поступила в редакцию 14.06.85.