решения опорной задачи (5) адаптивным методом [3] был осуществлен переход к процедуре доводки. Через три итерации метода Ньютона терминальные ограничения стали выполняться с точностью $|x_2(4)| \sim 10^{-8}$, $|x_3(4)| \sim 10^{-8}$. Опора $S^0_{оп}$: $J^0_{оп} = \{1\}$, $T^0_{оп} = \{2{,}46\}$ была принята за оптимальную. Ей соответствует базисное оптимальное управление $\omega^0 = (\chi^0, \eta^0)$: $\chi^0_1 = 0{,}9282$, $\chi^0_2 = 1$, $\eta^0(t) = -1$, $t \in [0; 2{,}46]$, $\eta^0(t) = 1$, $t \in]2{,}46; 4]$. Значение критерия качества задачи (7) оказалось равным $I(\omega^0) = 6{,}6795$.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 5. С. 1048.
2. Еровенко Л. Д. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 11. С. 968.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Минск, 1977. Ч. 1. 1978. Ч. 2. 1980. Ч. 3.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1984. Ч. 2.
5. Габасов Р., Гневко С. В., Даукшас В. З. // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27. С. 1065.

Поступила в редакцию 01.02.85.

УДК 539.3

Н. П. КАРЕТКО

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ, НАГРЕВАЕМОЙ ПОТОКОМ ТЕПЛА

При решении задач о термопрочности и разрушении тел с трещинами предварительно необходимо определять напряженно-деформированное состояние, обусловленное неравномерным распределением температуры. Наибольшая опасность разрушения возникает в случае нестационарных тепловых режимов. В литературе известны многочисленные исследования стационарных задач термоупругости для тел с трещинами. Исследования нестационарных задач единичны [1, 2].

В настоящей работе дано решение квазистатической задачи термоупругости для бесконечной изотропной пластинки с конечной прямолинейной трещиной, нагреваемой через берега разреза потоком тепла.

Пусть $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ — совокупность отрезков $L_k = [a_k, b_k]$ на оси Ox. По аналогии с работами [3—5] можно показать, что термоупругое состояние бесконечной пластинки с разрезами на отрезках прямой описывается формулами:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] + \alpha_1 T, \tag{1}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Omega(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)} + \Psi_0, \tag{2}$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \varkappa\Phi(z) + \Omega(\bar z) - (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)} - \Psi_0, \tag{3}$$

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) + \omega(\bar z) - (z - \bar z)\overline{\Phi(z)} - \Psi_0, \tag{4}$$

$$X + iY = -i[\varphi(z) - \omega(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi(z)} + \psi_0]_A^B, \tag{5}$$

$$\Psi_0 = \frac{\partial\psi_0}{\partial x}, \quad \psi_0 = 2\frac{\partial U_0}{\partial \bar z}, \quad \tau = \frac{k \cdot t}{c \cdot \rho}, \quad \alpha_1 = -\alpha_0 E, \tag{6}$$

где T — температура, усредненная по толщине пластинки и удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \varkappa_1^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau} - F, \tag{7}$$

$\varkappa_1^2 = \frac{\beta}{k\delta_0}$, $F = \varkappa_1^2 T_c(x, y, \tau) + \frac{Q(x, y, \tau)}{k}$, U_0 — частное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2}=\alpha_1 T. \tag{8}$$

Будем считать, что на бесконечности ($|z|\to\infty$) компоненты напряжения σ_x^∞, σ_y^∞, τ_{xy}^∞ равны нулю и функция Ψ_0 имеет вид:

$$\Psi_0=\Gamma_0+\frac{d_1'}{z}+\frac{d_1''}{\bar z}+O\left(\frac{1}{|z|^2}\right). \tag{9}$$

Тогда, как следует из формул (1)—(5), функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ при больших $|z|$ имеют вид:

$$\Phi(z)=\Gamma'+\frac{\gamma_1'}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right),\quad \Omega(z)=\Gamma''+\frac{\gamma_1''}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{10—11}$$

$$\Gamma'=B'+iC',\ \Gamma''=B''+iC'',\ C'=\frac{2\mu\varepsilon_\infty}{1+\varkappa},$$

$$B'=-\frac{\alpha_1 T_\infty}{4},\ B''=\mathrm{Re}\Gamma_0-\frac{\alpha_1 T_\infty}{4},\ C''=C'+\mathrm{Im}\Gamma_0,$$

$$\gamma_1'=\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)},\ \gamma_1'=\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}-\bar d_1'+d_1''.$$

Пусть на краях разреза со стороны областей $D^+(y>0)$ и $D^-(y<0)$ внешняя нагрузка отсутствует. В этом случае на основании формулы (2) имеем краевые условия:

$$\Phi^+-\Omega^-=-\Psi_{01}^+,\ \Phi^--\Omega^+=-\Psi_{01}^-\ \text{на}\ L, \tag{12}$$

откуда, вычитая и складывая, получаем

$$\begin{aligned}(\Phi+\Omega)^+-(\Phi+\Omega)^-&=2q(x),\\ (\Phi-\Omega)^++(\Phi-\Omega)^-&=2p(x),\end{aligned} \tag{13}$$

где $q(x)=\frac{1}{2}(\Psi_{01}^--\Psi_{01}^+)$, $p(x)=-\frac{1}{2}(\Psi_{01}^-+\Psi_{01}^+)$.

Общее решение краевой задачи (13) запишем в виде:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{q(x)\,dx}{x-z}+\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{p(x)\,dx}{X^+(x)(x-z)}+\frac{D_0}{2}+\frac{P_n(z)}{2}\cdot X(z), \tag{14}$$

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{q(x)\,dx}{x-z}-\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{p(x)\,dx}{X^+(x)(x-z)}+\frac{D_0}{2}-\frac{P_n(z)}{2}\cdot X(z), \tag{15}$$

где $X(z)=\prod\limits_{k=1}^{n}(z-a_k)^{-\frac{1}{2}}(z-b_k)^{-\frac{1}{2}}$, $P_n(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\ldots+c_n$, D_0, c_0, c_1, ..., c_n — произвольные коэффициенты.

Требуя, чтобы выражения для функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ удовлетворяли условиям (10), (11), будем иметь:

$$D_0=\Gamma'+\Gamma'',\ c_0=\Gamma'-\Gamma'',$$

$$c_1=\gamma_1'-\gamma_1''-\frac{1}{2}c_0\cdot\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k).$$

Остальные коэффициенты полинома $P_n(z)$ найдем, воспользовавшись равенствами:

$$\int_{L_k}[\varkappa(\Phi^+-\Phi^-)+(\Omega^--\Omega^+)]\,dx=\int_{L_k}(\Psi_{01}^+-\Psi_{01}^-)dx, \tag{16}$$

выражающими условие однозначности смещения при обходе разрезов на отрезках L_k. Как видно, одно из этих равенств является следствием остальных.

Рассмотрим теперь более подробно задачу для пластинки с одним разрезом. На краях разреза заданы зависящие от времени противоположно направленные тепловые потоки, т. е. для $\tau\geqslant 0$ имеем граничные и начальное условия:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q(\tau)}{k},\ |x| \leqslant a \text{ на } L^+;\ \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{q(\tau)}{k},\ |x| \leqslant a \text{ на } L^-, \tag{17}$$

$$T = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ при } |x| \to \infty,\ T = 0 \text{ при } |y| \to \infty,\ T(x, y, 0) = 0.$$

Будем считать, что пластинка с разрезом свободна от внешних напряжений на берегах разреза и на бесконечности.

Учитывая симметрию относительно оси Ox, задача теплопроводности сводится к задаче для нижней полуплоскости $D^-(y<0)$ при следующих граничных и начальном условиях:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \begin{cases} \frac{q(\tau)}{k}, & |x| \leqslant a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \text{ на } L^-,$$

$$T = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ при } |x| \to \infty,\quad T = 0 \text{ при } y \to -\infty,\ T(x, y, 0) = 0,$$

$$T_c(x, y, \tau) = 0.$$

Применяя метод интегральных преобразований Фурье по x и Лапласа по τ, находим трансформанту температуры:

$$\widetilde{T} = \frac{\overline{q(p)} \cdot \sin \omega a \cdot e^{-\sqrt{p+\varkappa_1^2+\omega^2}\,|y|}}{\pi k \omega \sqrt{p+\omega^2+\varkappa_1^2}}, \tag{18}$$

где $\widetilde{T} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} T \cdot e^{-p\tau - i\omega x} \cdot d\tau\, dx,\ \overline{q(p)} = \int\limits_0^\infty q(\tau) e^{-p\tau} \cdot d\tau.$

Переходя в формуле (18) от трансформант к оригиналам, находим температурное поле в пластинке с разрезом

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\pi}k}\int\limits_0^\tau \frac{q(\tau-u)}{\sqrt{u}} \cdot e^{-\varkappa_1^2 u - \frac{y^2}{4u}}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{u}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{u}}\right)\right] du. \tag{19}$$

Чтобы найти функцию Ψ_0, находим вначале трансформанты:

$$\widetilde{U}_0 = \frac{\alpha_1 \overline{q(p)} \cdot \sin \omega a \cdot e^{-\sqrt{p+\varkappa_1^2+\omega^2}\,|y|}}{\pi k \omega \sqrt{p+\varkappa_1^2+\omega^2}\,(p+\varkappa_1^2)}, \tag{20}$$

$$\widetilde{\Psi}_0 = -\frac{\alpha_1 \overline{q(p)} \cdot \sin \omega a}{\pi k (p+\varkappa_1^2)} \cdot \left(\frac{\omega}{\sqrt{p+\varkappa_1^2+\omega^2}} - \operatorname{sgn} y\right) e^{-\sqrt{p+\varkappa_1^2+\omega^2}\,|y|}. \tag{21}$$

Переходя в формуле (21) от изображений к оригиналам, находим:

$$\Psi_0 = \frac{i\alpha_1}{2\pi k}\int\limits_0^\tau q(\tau-u)\, e^{-\varkappa_1^2 u - \frac{y_2}{4u}}\left[(1-\operatorname{sgn} y)(I_1(x, y, a) - I_1(x, y, -a)) + \right.$$

$$\left. + (1+\operatorname{sgn} y)(I_2(x, y, a) - I_2(x, y, -a))\right] du, \tag{22}$$

где $I_1(x, y, a) = \frac{e^{-\frac{(x+a)^2}{4u}} - 1}{i(x+a) - |y|},\ I_2(x, y, a) = \frac{e^{-\frac{(x+a)^2}{4u}} - 1}{i(x+a) + |y|}.$

Из формулы (22) находим, что

$$\Psi_{01} = \Psi_{01}^- = \Psi_{01}^+ = \frac{\alpha_1}{\pi k}\int\limits_0^\tau q(\tau-u)\, e^{-\varkappa_1^2 u}\left[\frac{e^{-\frac{(x+a)^2}{4u}} - 1}{x+a} - \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{4u}} - 1}{x-a}\right] du.$$

Тогда формулы (14), (15) примут вид

$$\Omega(z) = -\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Psi_{01}\, dx}{X^+(x)(x-z)},\ X(z) = (z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

При этом компоненты напряжений на вещественной оси вне разреза определяются выражениями:

$$\sigma_x^- = 2\Psi_{01} + \alpha_1 T^-,\ \sigma_x^+ = 2\Psi_{01} + \alpha_1 T^+,\ T^- = T^+ = T(x,\ 0,\ \tau),$$

$$T(x,\ 0,\ \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,k}\int_0^\tau \frac{q(\tau-u)}{\sqrt{u}}\, e^{-\varkappa_1^2 u}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{u}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{u}}\right)\right] du.$$

Список литературы

1. Гайвась И. В., Кит Г. С. // Проблемы прочности. 1974. № 6. С. 72.
2. Кит Г. С., Побережный О. В. // Физ.-хим. механика материалов. 1976. Т. 12. № 4. С. 73.
3. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Минск, 1972.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
5. Каретко Н. П. // Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1985. Вып. 12.

Поступила в редакцию 06.06.85.

УДК 519.233.2

Д. В. СИНЬКЕВИЧ, Н. Н. ТРУШ

О РЕЗУЛЬТАТАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МОМЕНТОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ АГРЕГИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

Пусть имеется закрытая система из N индивидуумов, распределенных по r категориям $s_1, s_2, \ldots, s_r$, и временной ряд агрегированных наблюдений $y_{i,\tau}$, $i = \overline{1,\ r}$, $\tau = \overline{0,\ T}$ за ее структурным состоянием, где наблюдения $y_{i,\tau}$ удовлетворяют следующим условиям: $0 \leqslant y_{i,\tau} \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{r} y_{i,\tau} = 1$ для любых $\tau = \overline{0,\ T}$.

Математической моделью эволюции каждого из N элементов системы служит однородная, конечного числа состояний марковская цепь с одной и той же матрицей переходных вероятностей $P = \|p_{ij}\|$, $i,\ j = \overline{1,\ r}$, причем все N марковских цепей независимы.

При этих предположениях, рассматривая в качестве линейной статистической модели уравнение $y_{j,\tau} = \sum_{i=1}^{r} y_{i,\tau-1} p_{ij} + u_{j,\tau}$, $j = \overline{1,\ r}$, $\tau = \overline{1,\ T}$, получили различные оценки переходных вероятностей p_{ij}, $i,\ j = \overline{1,\ r}$ [1—6]. При исследовании некоторых асимптотических свойств оценок в этих работах широко используется результат, доказанный Мадански м [3]. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 1. Для любых $i,\ j = \overline{1,\ r}$, $\tau = \overline{0,\ T}$, неотрицательного целого n такого, что $\tau - n \geqslant 0$, имеет место равенство $\operatorname{cov}(y_{i,\tau};\ y_{j,\tau-n}) = N^{-1} \cdot q_{j,\tau-n}(p_{ji}^{(n)} - q_{i,\tau})$, где $q_{l,\Theta} = M y_{l,\Theta}$, $l = \overline{1,\ r}$, $\Theta = \overline{0,\ T}$, а $p_{ji}^{(n)}$ — переходная вероятность из состояния s_j в состояние s_l за n шагов.

В работах [3, 5] приведены многие интересные следствия из этой леммы. Однако при детальном исследовании асимптотических свойств оценок переходных вероятностей, в частности при оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме, их оказывается недостаточно [7—8]. Поэтому, используя предложенный Мадански м [3] подход, докажем ряд лемм для третьих и четвертых моментов случайных величин $y_{i,\tau}$, $u_{j,\Theta}$, $i,\ j = \overline{1,\ r}$, $\tau,\ \Theta = \overline{0,\ T}$.

Лемма 2. Для любых неотрицательных целых τ, s таких, что $\tau = \overline{0,\ T}$, $\tau \geqslant s$ и $i,\ j = \overline{1,\ r}$, имеет место равенство