в уравнение с невырожденным законом площадей, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$u(z, \tilde{\tau}) = \varphi^2(z, \tilde{\psi}(\tau, \tilde{\omega}(z, \tilde{\tau}))) \cdot F(z, \tilde{\psi}(\tau, \tilde{\omega}(z, \tilde{\tau})))$$

являлась интегралом уравнения (4). (Функции ψ и $\tilde{\omega}$ определяются соответственно формулами (6) и (7)).

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1' = (1 + x_1 - x_2)(1 + \tau)^{-2}(1 + x_1 + \tau x_2), \\ x_2' = (1 + x_1 - x_2)(1 + \tau)^{-2}(1 + 2x_1 - x_2 + \tau x_1) \end{cases} \tag{9}$$

на множестве $ZT = \{(x_1, x_2, \tau) \mid x_1 - x_2 > 0, \tau \geqslant 0\}$.

Осуществим замену вида (3) по формуле

$$d\tilde{\tau} = \frac{1 + x_1 + x_2}{1 + \tau} d\tau, \ (x_1, x_2, \tau) \in ZT. \tag{10}$$

Из (9) следует, что $x_1 - x_2 = (\xi - \eta)/(1 + \tau(\xi - \eta))$, $\xi = x_1(0)$, $\eta = x_2(0)$. Тогда из (10) вытекает $d\tilde{\tau} = \frac{1 + \xi - \eta}{1 + \tau(1 + \xi - \eta)} d\tau \Rightarrow \tilde{\tau} = \ln(1 + \tau(1 + \xi - \eta))$ ($\tilde{\sigma}$ полагаем равным нулю). Поэтому $\tau = (e^{\tilde{\tau}} - 1)/(1 + \xi - \eta)$, $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = (\xi - \eta)/(1 + \tau(1 + \xi - \eta)) = (\xi - \eta)/e^{\tilde{\tau}}$, $\xi - \eta = (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)e^{\tilde{\tau}}$ и, следовательно, $\tau = (e^{\tilde{\tau}} - 1)/(1 + (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)e^{\tilde{\tau}})$. На основании (8) система (9) преобразуется к виду

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + e^{-\tilde{\tau}}, \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + e^{-\tilde{\tau}}, \ (x_1, x_2, \tilde{\tau}) \in \widetilde{ZT}, \end{cases} \tag{11}$$

где $\widetilde{ZT} = \{(x_1, x_2, \tilde{\tau}) \mid x_1 - x_2 > 0, \ \tilde{\tau} \geqslant 0\}$.

Функция $\tilde{F}$ для (11) имеет вид $\tilde{F}(x_1, x_2, \tilde{\tau}) = (2x_1^2 - 2x_1x_2 + (x_1 - x_2)e^{-\tilde{\tau}})^2$ и является интегралом (11), что означает наличие у (11) невырожденного закона площадей. Отметим, что (9) не обладает законом площадей.

Список литературы

1. Наумович Н. Ф. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1984. № 2. С. 54.
2. Наумович Н. Ф. // Там же. № 1. С. 32.
3. Богданова М. Ю., Наумович Н. Ф. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 9. С. 1613.
4. Богданов Ю. С., Сыроид Ю. Б. Дифференц. уравнения. Минск, 1983.

Поступила в редакцию 18.06.84.

УДК 517.977

Л. Д. ЕРОВЕНКО

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОДВИЖНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

1. Рассмотрим задачу терминального управления

$$I(u) = c'x(t_*) \to \max, \ \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \ x(t_0) = Gz,$$
$$f_* \leqslant z \leqslant f^*, \ Hx(t_*) = g, \ |u(t)| \leqslant 1, \ t \in T = [t_0, t_*]. \tag{1}$$

Здесь $A(t) \in R^{n \times n}$, $b(t) \in R^n$, $t \in T$, — кусочно-непрерывные функции; $H \in R^{m \times n}$, $G \in R^{n \times r}$, $g \in R^m$, $c \in R^n$; z, f_*, $f^* \in R^r$ — постоянные матрицы и векторы-столбцы.

Кусочно-постоянную функцию $u(t)$, $t\in T$, удовлетворяющую прямому ограничению $|u(t)|\leqslant 1$, $t\in T$, назовем управлением. Вектор $z=z(J)=(z_i, i\in\{1, 2, \ldots, r\})$, $f_*\leqslant z\leqslant f^*$ — стартовым вектором.

Совокупность $v=(u, z)$ из управления $u=(u(t), t\in T)$ и стартового вектора z назовем расширенным управлением. Соответствующее этому расширенному управлению непрерывное решение уравнения $\dot{x}=A(t)x+b(t)u$, с начальным условием $x(t_0)=Gz$ назовем траекторией.

Слово «расширенное» в дальнейшем будем опускать, употребляя его только в случае необходимости.

Управление v и соответствующую ему траекторию $x(t)$, $t\in T$, назовем допустимыми, если вдоль них выполняется основное терминальное ограничение $Hx(t_*)=g$. Решение задачи (1) — допустимые управление $v^0=(u^0, z^0)$ и траектория $x^0(t)$, $t\in T$, называются оптимальными управлением и траекторией. Субоптимальное (ε-оптимальное) управление $v^\varepsilon=(u^\varepsilon, z^\varepsilon)$ определяется неравенством $I(u^0, z^0)-I(u^\varepsilon, z^\varepsilon)\leqslant\varepsilon$.

Предлагаемый в работе прямой метод решения задачи (1) является обобщением и развитием метода редукции к опорным задачам [1]. Предполагается, что задача (1) не вырождена [2].

2. Из множества индексов $J=\{1, 2, \ldots, r\}$ выделим подмножество $J_{\text{оп}}$. На отрезке T отметим множество изолированных моментов $T_{\text{оп}}=\{t_k\in T, k\in K_{\text{оп}}=\{1, 2, \ldots, p\}\}$, $p+|J_{\text{оп}}|=m$. Составим матрицу $P_{\text{оп}}=P(S_{\text{оп}})=(D(I, j), j\in J_{\text{оп}}, p(t_k), k\in K_{\text{оп}})$, где $S_{\text{оп}}=\{J_{\text{оп}}, T_{\text{оп}}\}$, $D(I, j)$ — j-тый столбец матрицы $D(I, J)=Q(t_0)G$; $p(t)=Q(t)b(t)$, $t\in T$; $Q(t)$, $t\in T$,— решение системы $\dot{Q}=-QA(t)$, $Q(t_*)=H$.

Совокупность $S_{\text{оп}}=\{J_{\text{оп}}, T_{\text{оп}}\}$ назовем опорой задачи (1), множество $T_{\text{оп}}$ — множеством опорных моментов, множество $J_{\text{оп}}$ — множеством опорных индексов, матрицу $P_{\text{оп}}$ — опорной матрицей, если $\det P_{\text{оп}}\neq 0$. Пара $\{v, S_{\text{оп}}\}$ из допустимого управления v и опоры $S_{\text{оп}}$ — расширенное опорное управление.

Опорному управлению $\{v, S_{\text{оп}}\}$ поставим в соответствие котраекторию $\psi(t)$, $t\in T$, являющуюся специальным решением сопряженной системы $\dot{\psi}=-A'(t)\psi$, $\psi(t_*)=c-H'y$, где $y'=(h_j, j\in J_{\text{оп}}; c(t_к), k\in K_{\text{оп}})'\times P_{\text{оп}}^{-1}$; $c(t)=f'(t)b(t)$, $t\in T$; $\dot{f}=-A'(t)f$, $f(t_*)=c$; $h=G'f(t_0)$.

Пару $\Delta(y)=(\Delta, \Delta(\cdot))$, где $\Delta(\cdot)=(\Delta(t), t\in T)$, $\Delta(t)=-\psi'(t)b(t)$, $t\in T$, $\Delta=(\Delta_j, j\in J)=D'y-h$, назовем расширенным коуправлением.

Задача (1) далее предполагается простой [2]. Будем говорить, что опорное управление $\{v, S_{\text{оп}}\}$ удовлетворяет условию ε-максимума, если вдоль него и соответствующих ему решений $x(t)$, $\psi(t)$, $t\in T$, прямой и сопряженной систем выполняются соотношения:

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t)=\max_{|u|\leqslant 1} H(x(t), \psi(t), u, t)-\varepsilon(t), \ t\in T;$$
$$h(\psi(t_0), z)=\max_{f_*\leqslant\eta\leqslant f^*} h(\psi(t_0), \eta)-\varepsilon_1;\ \beta(v, S_{\text{оп}})=\int_{t_0}^{t_*}\varepsilon(t)\,dt+\varepsilon_1\leqslant\varepsilon. \tag{2}$$

Здесь $H(x, \psi, u, t)=\psi'(A(t)x+b(t)u)$, $h(\chi, z)=\chi' Gz$.

Величина $\beta(v, S_{\text{оп}})$ называется оценкой субоптимальности опорного управления $\{v, S_{\text{оп}}\}$, поскольку $I(u^0, z^0)-I(u, z)\leqslant\beta(v, S_{\text{оп}})$.

Справедлива следующая

Теорема (принцип ε-максимума). При любом $\varepsilon\geqslant 0$ допустимое управление $v=(z, u)$ является ε-оптимальным тогда и только тогда, когда существует такая опора $S_{\text{оп}}$, при которой опорное управление $\{v, S_{\text{оп}}\}$ удовлетворяет условию ε-максимума (2).

3. Пусть при заданном $\varepsilon\geqslant 0$ начальное опорное управление $\{v, S_{\text{оп}}\}$ не удовлетворяет принципу ε-максимума. Опишем итерацию метода, принцип которой основан на уменьшении оценки субоптимальности $\beta(v, S_{\text{оп}})$ [3]. Итерацию составим из двух процедур — замены управления и замены опоры. Предварительно проверим качество имеющегося опорного управления на возможность перехода непосредственно к процедуре доводки — заключительной операции метода. Для этого по коуправлению $\Delta(y)$ вычислим функцию $\omega=(\chi, \eta)$:

$$\chi_j = f_j^* \text{ при } \Delta_j < 0;\ \chi_j = f_{*j} \text{ при } \Delta_j \geqslant 0,\ j \in \dot J_н;\ \chi_j = \gamma_j,\ j \in \dot J_{оп}; \quad (3)$$

$\eta(t) = -\operatorname{sgn}\Delta(t)$, если $\Delta(t) \neq 0$; $\eta(t) \in [-1, 1]$, если $\Delta(t) = 0$, $t \in T$, где γ_j — j-я компонента вектора $\gamma(\dot J_{оп}) = (\gamma_j,\ j \in \dot J_{оп}) = P_{оп}^{-1}(\dot J_{оп}, I)\left(g - \int_{t_0}^{t_*} p(t)\eta(t)\,dt - D(I, \dot J_н)\chi(\dot J_н)\right)$. Построим вектор $\lambda(T_{оп}) = P_{оп}^{-1}(T_{оп}, I)\left(g - \int_{t_0}^{t_*} p(t)\eta(t)\,dt - D(I, \dot J_н)\chi(\dot J_н)\right)$.

Функцию $\omega=(\chi, \eta)$ назовем расширенным квазиуправлением, соответствующее ему решение $\varkappa(t)$, $t\in T$ уравнения $\dot\varkappa = A(t)\varkappa + b(t)\eta(t)$, $\varkappa(t_0) = G\chi$ — квазитраекторией. Зададим параметр метода $\mu > 0$. Если выполняются условия

$$\|\lambda(T_{оп})\| \leqslant \mu,\quad f_*(J_{оп}) < \gamma(J_{оп}) < f^*(J_{оп}), \quad (4)$$

то с опорой $S_{оп}$ и квазиуправлением ω переходим к процедуре доводки, описанной в п. 4.

Пусть условия (4) не выполняются. Управление $\bar v = (\bar z, \bar u)$ строим в виде $\bar z_j = z_j + \bar s_j$, $j \in \dot J_{оп}$, $\bar z_j = z_j + \bar\Theta\eta_j$, $j \in \dot J_н$, $\bar u(t) = u(t) + \bar v_i$, $t \in]\underline{\tau}_i, \bar\tau_i]$, $i = \overline{1, M}$, $\bar u(t) = u(t) + \bar\Theta\omega(t)$, $t \in T_*$. Здесь $T_* = T \setminus T_0$, $T_0 = \{t \in T\colon |\Delta(t)| \leqslant \alpha\} = \bigcup_{i=1}^{M}]\underline{\tau}_i, \bar\tau_i]$, $\bar\tau_i - \underline{\tau}_i \leqslant h$, $i = \overline{1, M}$, $\underline{\tau}_i < \bar\tau_i \leqslant \underline{\tau}_{i+1}$, $i = \overline{1, M-1}$; $T_{оп} \subset \{\bar\tau_i,\ i = \overline{1, M}\}$, $u(t) = u_i = \text{const}$, $t \in]\underline{\tau}_i, \bar\tau_i]$, $i = \overline{1, M}$; $\eta_j = f_j^* - z_j$ при $\Delta_j < 0$, $\eta_j = f_{*j} - z_j$ при $\Delta_j \geqslant 0$, $j \in \dot J_н$; $\omega(t) = 1 - u(t)$ при $\Delta(t) < -\alpha$, $\omega(t) = -1 - u(t)$ при $\Delta(t) > \alpha$, $t \in T_*$, ($\alpha > 0$, $h > 0$ — параметры метода. Векторы $\bar s = (\bar s_j,\ j \in \dot J_{оп})$, $\bar v = (\bar v_i,\ i = \overline{1, M})$ и переменная $\bar\Theta$ являются решением опорной задачи

$$\sum_{i=1}^{N} g_i l_i \to \max,\quad \sum_{i=1}^{N} q_i l_i = 0,\quad d_{*i} \leqslant l_i \leqslant d_i^*,\quad i = \overline{1, N}, \quad (5)$$

где $l = (l_i,\ i = \overline{1, N}) = (s_j,\ j \in \dot J_{оп};\ v_i,\ i = \overline{1, M};\ \Theta)$, $N = |\dot J_{оп}| + M + 1$;

$$g = (g_i,\ i = \overline{1, N}) = (\underbrace{0, \dots 0}_{|\dot J_{оп}|};\ -\int_{\underline{\tau}_i}^{\bar\tau_i} \Delta(t)\,dt,\ i = \overline{1, M};\ -\sum_{j \in J_н} \Delta_j\eta_j - \int_{T_*} \Delta(t)\omega(t)\,dt);\ Q = (q_i,\ i = \overline{1, N}) = (D(I, j),\ j \in \dot J_{оп};\ \int_{\underline{\tau}_i}^{\bar\tau_i} p(t)\,dt,$$

$$i = \overline{1, M};\ D(I, \dot J_н)\eta(\dot J_н) + \int_{T_*} p(t)\omega(t)\,dt);\quad d_* = (d_{*i},\ i = \overline{1, N}) = (f_{*j} - z_j,\ j \in \dot J_{оп};\ -1 - u_i,\ i = \overline{1, M};\ 0);\ d^* = (d_i^*,\ i = \overline{1, N}) = (f_j^* - z_j,\ j \in \dot J_{оп};\ 1 - u_i,\ i = \overline{1, M};\ 1).$$

Пусть $\det Q(L_{оп}) \neq 0$, где $Q(L_{оп}) = (q_i,\ i \in L_{оп})$; $L_{оп} \subset L = \{1, 2, \dots, N\}$, $L_{оп} = \{N_{оп}, M_{оп}\}$, $N_{оп} = \{1, 2, \dots, |\dot J_{оп}|\}$; $M_{оп} = \{|\dot J_{оп}| + k_1,\ |\dot J_{оп}| + k_2, \dots, |\dot J_{оп}| + k_p\} \subset \{|\dot J_{оп}| + 1,\ |\dot J_{оп}| + 2, \dots, |\dot J_{оп}| + N\}$, $T_{оп} = \{\bar\tau_i,\ i \in K_{оп}\}$, $K_{оп} = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$. Решение задачи (5) начинаем с опорного плана $\{L_{оп}, 0\}$. Обозначим через $\bar L_{оп} = \{\bar N_{оп}, \bar M_{оп}\}$ оптимальную опору задачи (5), $\bar N_{оп} = \bar L_{оп} \cap N_{оп}$, $\bar M_{оп} = \{|\dot J_{оп}| + r_1, |\dot J_{оп}| + r_2, \dots, |\dot J_{оп}| + r_s\}$. Положим $\tilde S_{оп} = \{\tilde J_{оп}, \tilde T_{оп}\}$, $|\tilde J_{оп}| = |\bar N_{оп}|$, $\tilde J_{оп} \subset \dot J_{оп}$, $\tilde T_{оп} = \{\bar\tau_i,\ i \in \bar K_{оп}\}$, $\bar K_{оп} = \{r_1, r_2, \dots, r_s\}$. Если $\beta(\bar v, \tilde S_{оп}) \leqslant \varepsilon$, то $\bar v$ является ε-оптимальным управлением.

Пусть $\beta(v, \bar{S}_{оп})>\varepsilon$. Из двух опор $S_{оп}$, $\bar{S}_{оп}$, проверив $\det P(\bar{S}_{оп})\neq 0$, выбираем лучшую. Предположим, что $\beta(\bar{v}, S_{оп})\leqslant\beta(\bar{v}, \bar{S}_{оп})$. При замене опоры $S_{оп}$ могут иметь место случаи:

1) $\exists \dot{J}^{-}_{оп}\subset J_{оп}$: $\gamma_j>f^*_j$ либо $\gamma_j<f_{*j}$, $j\in\dot{J}^{-}_{оп}$; 2) $f_*(\dot{J}_{оп})\leqslant\gamma(\dot{J}_{оп})\leqslant f^*(\dot{J}_{оп})$, $\|\lambda(T_{оп})\|>\mu$. В случае 1) вычислим $|\xi_{j_0}|=\max\limits_{j\in\dot{J}^{-}_{оп}}|\xi_j|$, где $\xi_j=\gamma_j-f^*_j$ при $\gamma_j>f^*_j$, $\xi_j=\gamma_j-f_{*j}$ при $\gamma_j<f_{*j}$, $j\in\dot{J}^{-}_{оп}$ и положим $\delta_{j_0}=-1$ при $\xi_{j_0}=\gamma_{j_0}-f^*_{j_0}$; $\delta_{j_0}=1$ при $\xi_{j_0}=\gamma_{j_0}-f_{*j_0}$; $\delta_j=0$, $j\in\dot{J}_{оп}\setminus j_0$; $\delta(t)=0$, $t\in T_{оп}$. Подсчитаем $\Delta y'(S_{оп})=\delta'_{оп}P^{-1}_{оп}$, $\delta'_{оп}=(\delta j, j\in\dot{J}_{оп}, \delta(T_{оп}))$; $\delta=D'\Delta y$, $\delta(t)=\Delta y'p(t)$, $t\in T$; $\bar{\Delta}(t)=\Delta(t)+\sigma_0\delta(t)$, $t\in T$; $\bar{\Delta}_j=\Delta_j+\sigma_0\delta_j$, $j\in\dot{J}$; σ_0 — максимально-допустимый двойственный шаг [3].

1а) Пусть $\sigma_0=\sigma_{j_*}$, $j_*\in\dot{J}_н$. Тогда $\bar{\dot{J}}_{оп}=(\dot{J}_{оп}\setminus j_0)\cup j_*$, $\bar{T}_{оп}=T_{оп}$.

1б) Пусть $\sigma_0=\sigma(t_*)$, $t_*\in T\setminus T_{оп}$: $\bar{\Delta}(t_*)=0$. Тогда $\bar{\dot{J}}_{оп}=\dot{J}_{оп}\setminus j_0$, $\bar{T}_{оп}=T_{оп}\cup t_*$.

В случае 2) вычислим $|\lambda(t_0)|=\max\limits_{t\in T_{оп}}|\lambda(t)|$ и положим $\delta(t_0)=-\operatorname{sgn}\lambda(t_0)$, $\delta(t)=0$, $t\in T_{оп}\setminus t_0$; $\delta_j=0$, $j\in J_{оп}$. Векторы δ, $\bar{\Delta}$ и функции $\delta(t)$, $\bar{\Delta}(t)$, $t\in T$, строятся аналогично случаю 1). Новую опору $\bar{S}_{оп}$ строим следующим образом.

2а) Пусть $\sigma_0=\sigma_{j_*}$, $j_*\in\dot{J}_н$. Тогда $\bar{\dot{J}}_{оп}=\dot{J}_{оп}\cup j_*$, $\bar{T}_{оп}=T_{оп}\setminus t_0$.

2б) Если $\sigma_0=\sigma(t_*)$, $t_*\in T\setminus T_{оп}$: $\bar{\Delta}(t_*)=0$, то $\bar{J}_{оп}=J_{оп}$, $\bar{T}_{оп}=(T_{оп}\setminus t_0)\cup t_*$.

При $\beta(\bar{v}, \bar{S}_{оп})\leqslant\varepsilon$ $\bar{v}$ — ε-оптимальное управление. Если $\beta(\bar{v}, \bar{S}_{оп})>\varepsilon$, то с измененными параметрами $\bar{\alpha}<\alpha$, $\bar{h}\leqslant h$ переходим к следующей итерации метода.

4. Пусть выполняются условия перехода к процедуре доводки (4). Процесс решения задачи (1) в процедуре доводки завершаем построением оптимальной опоры $S^0_{оп}$ и соответствующего ей базисного оптимального управления $\omega^0=(\chi^0, \eta^0)$ (3). Поиск оптимальной опоры сводится к решению системы нелинейных уравнений

$$D(I, \dot{J}^0_{оп})\chi^0(\dot{J}^0_{оп})+2\sum_{j=1}^{p}\operatorname{sgn}\dot{\Delta}(t_j)\int_{t_j}^{t^0_j}p(t)\,dt=g-\int_{t_0}^{t_*}p(t)\eta(t)\,dt-$$
$$-D(I, \dot{J}^0_н)\chi^0(\dot{J}^0_н) \tag{6}$$

методом Ньютона. Пусть известно k-ое приближение $T^{(k)}_{оп}=(t^{(k)}_j, j=\overline{1, p})$, $\chi^{(k)}(\dot{J}_{оп})$ к решению системы (6). Следующее $(k+1)$-ое приближение определяем по формуле $T^{(k+1)}_{оп}=T^{(k)}_{оп}+1/2\{\operatorname{sgn}\dot{\Delta}(t_j)\lambda_j(T^{(k)}_{оп}), \ j=\overline{1, p}\}$, $\chi^{(k+1)}(\dot{J}_{оп})=\gamma^{(k+1)}(\dot{J}_{оп})$. Если параметр μ выбран неудачно и для некоторого приближения условия (4) на множестве $\dot{J}_{оп}$ нарушаются, то следует вернуться к итерации метода. Процедуру доводки заканчиваем в том случае, если для опоры $S^0_{оп}$ и управления ω^0 терминальные ограничения в задаче (1) будут выполняться в пределах заданной точности.

5. Рассмотрим модельную задачу

$$\begin{gathered} I(u)=x_1(4)\to\max,\ \dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=x_3,\ \dot{x}_3=u,\ x_1(0)=z_2,\\ x_2(0)=z_1+z_2,\ x_3(0)=z_1,\ 0\leqslant z_i\leqslant 1,\ i=1, 2;\ |u(t)|\leqslant 1,\\ t\in T=[0, 4],\ x_2(4)=x_3(4)=0. \end{gathered} \tag{7}$$

Начальные допустимое управление и опора имели вид $v^{(0)}=(z^{(0)}, u^{(0)})$: $u^{(0)}(t)=0$, $t\in[0; 4]$; $z^{(0)}=(0; 0)$; $S^{(0)}_{оп}$: $\dot{J}^{(0)}_{оп}=\{2\}$, $T^{(0)}_{оп}=\{2; 0\}$. После решения опорной задачи (5) адаптивным методом [3] был осуществлен переход к процедуре доводки. Через три итерации метода Ньютона терминальные ограничения стали выполняться с точностью $|x_2(4)| \sim 10^{-8}$, $|x_3(4)| \sim 10^{-8}$. Опора $S^0_{\text{оп}}$: $J^0_{\text{оп}} = \{1\}$, $T^0_{\text{оп}} = \{2{,}46\}$ была принята за оптимальную. Ей соответствует базисное оптимальное управление $\omega^0 = (\chi^0, \eta^0)$: $\chi^0_1 = 0{,}9282$, $\chi^0_2 = 1$, $\eta^0(t) = -1$, $t \in [0;\ 2{,}46]$, $\eta^0(t) = 1$, $t \in]2{,}46;\ 4]$. Значение критерия качества задачи (7) оказалось равным $I(\omega^0) = 6{,}6795$.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 5. С. 1048.
2. Еровенко Л. Д. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 11. С. 968.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Минск, 1977. Ч. 1. 1978. Ч. 2. 1980. Ч. 3.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1984. Ч. 2.
5. Габасов Р., Гневко С. В., Даукшас В. З. // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27. С. 1065.

Поступила в редакцию 01.02.85.

УДК 539.3

Н. П. КАРЕТКО

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ, НАГРЕВАЕМОЙ ПОТОКОМ ТЕПЛА

При решении задач о термопрочности и разрушении тел с трещинами предварительно необходимо определять напряженно-деформированное состояние, обусловленное неравномерным распределением температуры. Наибольшая опасность разрушения возникает в случае нестационарных тепловых режимов. В литературе известны многочисленные исследования стационарных задач термоупругости для тел с трещинами. Исследования нестационарных задач единичны [1, 2].

В настоящей работе дано решение квазистатической задачи термоупругости для бесконечной изотропной пластинки с конечной прямолинейной трещиной, нагреваемой через берега разреза потоком тепла.

Пусть $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ — совокупность отрезков $L_k = [a_k,\ b_k]$ на оси Ox. По аналогии с работами [3—5] можно показать, что термоупругое состояние бесконечной пластинки с разрезами на отрезках прямой описывается формулами:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right] + \alpha_1 T, \tag{1}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Omega(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)} + \Psi_0, \tag{2}$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \varkappa\Phi(z) + \Omega(\bar z) - (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)} - \Psi_0, \tag{3}$$

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) + \omega(\bar z) - (z - \bar z)\overline{\Phi(z)} - \Psi_0, \tag{4}$$

$$X + iY = -i\left[\varphi(z) - \omega(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi(z)} + \psi_0\right]_A^B, \tag{5}$$

$$\Psi_0 = \frac{\partial\psi_0}{\partial x},\quad \psi_0 = 2\frac{\partial U_0}{\partial \bar z},\quad \tau = \frac{k \cdot t}{c \cdot \rho},\quad \alpha_1 = -\alpha_0 E, \tag{6}$$

где T — температура, усредненная по толщине пластинки и удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \varkappa_1^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau} - F, \tag{7}$$

$\varkappa_1^2 = \frac{\beta}{k\delta_0}$, $F = \varkappa_1^2 T_c(x,\ y,\ \tau) + \frac{Q(x,\ y,\ \tau)}{k}$, U_0 — частное решение уравнения