

УДК 517.925.3

Н. Ф. НАУМОВИЧ

ЗАМЕНА ВРЕМЕНИ В ВЕКТОРНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ЗАКОН ПЛОЩАДЕЙ

Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение $z' = h(z, \tau)$, $(z, \tau) \in ZT \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ в предположениях, изложенных в [1]. Выделяя основные и дополнительные координаты, функцию h представляем также и в виде $h = (f, g)$. Аналогично [2 и 3] вводим понятие секторной скорости $\omega(\tau)$ и доказываем, что $\omega(\tau) = \frac{1}{2} \sqrt{F(z(\tau), \tau)}$, $\tau \in t(\xi, \sigma)$, где

$$F(z, \tau) = \langle f(z, \tau), f(z, \tau) \rangle \cdot \langle x, x \rangle - \langle x, f(z, \tau) \rangle^2 \quad (1)$$

и сохраняются понятия вырожденного и невырожденного законов площадей.

Для краткости изложения уравнение рассматриваем в области $ZT^* \subset ZT$, предполагая, что сечения областей ZT и ZT^* некоторой плоскостью $\tau = \sigma$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+m+1}$ совпадают и что все решения уравнения

$$z' = h(z, \tau), \quad (z, \tau) \in ZT^* \quad (2)$$

с начальными значениями из ZT^* продолжимы до плоскости $\tau = \sigma$. В такой ситуации все промежутки $t(\xi', \sigma')$, $(\xi', \sigma') \in ZT^*$ имеют общую точку σ . Решение $z(\tau; \xi, \sigma)$ уравнения (2) и его промежуток существования $t(\xi, \sigma)$ обозначим соответственно $z(\tau; \xi)$ и $t(\xi)$, хотя уравнение (2) и не обязано быть стационарным.

Поскольку (2) однозначно разрешимо, то из соотношения $z = z(\tau, \xi)$, $\xi \in Z_\sigma$, $\tau \in t(\xi)$, где Z_σ — сечение области ZT^* плоскостью $\tau = \sigma$, однозначно определяется векторная функция $\xi = \omega(z, \tau)$, $\tau \in t(\xi)$, $z \in Z_\sigma$, такая что $z(\tau, \omega(z, \tau)) = z$. Вдоль каждого решения $z = z(\tau, \xi)$ уравнения (2) выполняется тождество $\xi = \omega(z(\tau, \xi), \tau)$, которое означает, что составляющие $\omega_h(z, \tau)$ векторной функции ω являются интегралами (2) и образуют в совокупности базис множества всех интегралов (см., например, [4, с. 143]).

Зададим на ZT скалярную функцию φ непрерывную по (z, τ) и не обращающуюся в нуль на ZT . Поскольку ZT — область, то φ сохраняет знак. Произведем в уравнении (2) замену аргумента τ на аргумент $\tilde{\tau}$ по формуле

$$\tilde{d\tau} = d\tau / \varphi(z, \tau), \quad (z, \tau) \in ZT^*. \quad (3)$$

В итоге приходим к уравнению такого же типа

$$\frac{dz}{\tilde{d\tau}} = \tilde{h}(z, \tilde{\tau}), \quad (z, \tilde{\tau}) \in \tilde{ZT}^* \subset \mathbb{R}^{n+m+1}. \quad (4)$$

В дальнейшем все понятия для уравнения (4), являющиеся аналогами соответствующих понятий A для уравнения (2), обозначаем через

А. Например, $\tilde{t}(\xi)$ — промежуток, на котором определено решение $\tilde{z}(\tau, \xi)$ уравнения (4). Исключения составляют начальные значения соответствующих решений, которые имеют общее значение ξ .

Соотношение (3) означает, что

$$d\tilde{\tau} = d\tau / \varphi(z(\tau, \xi), \tau), \quad \tau \in t(\xi), \quad (5)$$

т. е. вдоль каждого решения $z(\tau, \xi)$ уравнения (2) аргумент τ преобразуется по своему собственному закону. Без ограничения общности можно считать, что при любом ξ значению $\tau = \sigma$ отвечает значение $\tilde{\tau} = \tilde{\sigma}$. Из соотношения (7) следует, что

$$\tilde{\tau} = \int_{\sigma}^{\tau} \frac{d\alpha}{\varphi(z(\alpha, \xi), \alpha)} + \tilde{\sigma} =: \tilde{\psi}(\tau, \xi), \quad (\tau, \xi) \in ZT^*.$$

Функция $\tilde{\psi}(\tau, \xi)$ монотонна по τ и непрерывна по (τ, ξ) , поэтому существует обратная функция

$$\tau = \psi(\tilde{\tau}, \xi), \quad \xi \in Z_{\sigma}, \quad \tilde{\tau} \in \tilde{t}(\xi). \quad (6)$$

Решение $z(\tau, \xi)$ уравнения (2) после преобразования (5) принимает вид $\tilde{z} = z(\psi(\tilde{\tau}, \xi), \xi) =: \tilde{z}(\tilde{\tau}, \xi), \quad \xi \in Z_{\sigma}, \quad \tilde{\tau} \in \tilde{t}(\xi)$.

На основании однозначной разрешимости уравнения (2) и взаимно однозначного соответствия между τ и $\tilde{\tau}$ из соотношения $\tilde{z} = z(\psi(\tilde{\tau}, \xi), \xi)$, $\xi \in Z_{\sigma}$, $\tilde{\tau} \in \tilde{t}(\xi)$ можно определить функцию

$$\xi = \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau}), \quad (\tilde{z}, \tilde{\tau}) \in \tilde{ZT}^*, \quad (7)$$

такую, что $z(\psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau})), \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau})) = \tilde{z}(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau})) = \tilde{\xi}$.

Для установления связи между функциями h и $\tilde{h}$ вычислим $\frac{\partial \tilde{z}(\tilde{\tau}, \xi)}{\partial \tilde{\tau}}$.

Из формул (2), (5), (7) получаем: $\frac{\partial \tilde{z}(\tilde{\tau}, \xi)}{\partial \tilde{\tau}} = \frac{\partial}{\partial \tau} z(\psi(\tilde{\tau}, \xi), \xi) = z'(\psi(\tilde{\tau}, \xi), \xi) \cdot \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} = h(z(\psi(\tilde{\tau}, \xi), \xi), \psi(\tilde{\tau}, \xi)) \cdot \varphi(z(\psi(\tilde{\tau}, \xi), \xi), \psi(\tilde{\tau}, \xi)) =$
 $= h(\tilde{z}(\tilde{\tau}, \xi), \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}(\tilde{\tau}, \xi), \tilde{\tau}))) \varphi(\tilde{z}(\tilde{\tau}, \xi), \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}(\tilde{\tau}, \xi), \tilde{\tau}))).$ Поэтому функция $\tilde{z} = \tilde{z}(\tilde{\tau}, \xi)$ удовлетворяет соотношению $d\tilde{z}/d\tilde{\tau} = \varphi(\tilde{z}, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau})))h(\tilde{z}, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau}))), (\tilde{z}, \tilde{\tau}) \in \tilde{ZT}^*$, и это позволяет заключить, что

$$\tilde{h}(\tilde{z}, \tilde{\tau}) = \varphi(\tilde{z}, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau})))h(\tilde{z}, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau}))). \quad (8)$$

Функции F и $\tilde{F}$ (см. (1)), вычисляемые соответственно для уравнений (2) и (4), на основании (8) связаны соотношением $\tilde{F}(\tilde{z}, \tilde{\tau}) = \varphi^2(\tilde{z}, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau})))F(\tilde{z}, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(\tilde{z}, \tilde{\tau})))$. Проведенные выше рассуждения и результаты (2) приводят к следующей теореме.

Теорема. Для того чтобы преобразование (3) с непрерывной по (z, τ) и не обращающейся в нуль на ZT скалярной функцией φ переводило уравнение (2) с функцией F , не равной тождественно нулю на ZT ,

в уравнение с невырожденным законом площадей, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$u(z, \tilde{\tau}) = \varphi^2(z, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(z, \tilde{\tau}))) \cdot F(z, \psi(\tilde{\tau}, \tilde{\omega}(z, \tilde{\tau})))$$

являлась интегралом уравнения (4). (Функции ψ и $\tilde{\omega}$ определяются соответственно формулами (6) и (7)).

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1' = (1 + x_1 - x_2)(1 + \tau)^{-2}(1 + x_1 + \tau x_2), \\ x_2' = (1 + x_1 - x_2)(1 + \tau)^{-2}(1 + 2x_1 - x_2 + \tau x_1) \end{cases} \quad (9)$$

на множестве $ZT = \{(x_1, x_2, \tau) | x_1 - x_2 > 0, \tau \geq 0\}$.

Осуществим замену вида (3) по формуле

$$\tilde{d\tau} = \frac{1 + x_1 + x_2}{1 + \tau} d\tau, \quad (x_1, x_2, \tau) \in ZT. \quad (10)$$

Из (9) следует, что $x_1 - x_2 = (\xi - \eta)/(1 + \tau(\xi - \eta))$, $\xi = x_1(0)$, $\eta = x_2(0)$. Тогда из (10) вытекает $\tilde{d\tau} = \frac{1 + \xi - \eta}{1 + \tau(1 + \xi - \eta)} d\tau \Rightarrow \tilde{\tau} = \ln(1 + \tau(1 + \xi - \eta))$ (σ полагаем равным нулю). Поэтому $\tau = (e^{\tilde{\tau}} - 1)/(1 + \xi - \eta)$, $x_1 - x_2 = (\xi - \eta)/(1 + \tau(1 + \xi - \eta)) = (\xi - \eta)e^{-\tilde{\tau}}$, $\xi - \eta = (x_1 - x_2)e^{\tilde{\tau}}$ и, следовательно, $\tau = (e^{\tilde{\tau}} - 1)/(1 + (x_1 - x_2)e^{\tilde{\tau}})$. На основании (8) система (9) преобразуется к виду

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + e^{-\tilde{\tau}}, \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + e^{-\tilde{\tau}}, \end{cases} \quad (x_1, x_2, \tilde{\tau}) \in \tilde{ZT}, \quad (11)$$

где $\tilde{ZT} = \{(x_1, x_2, \tilde{\tau}) | x_1 - x_2 > 0, \tilde{\tau} \geq 0\}$.

Функция $\tilde{F}$ для (11) имеет вид $\tilde{F}(x_1, x_2, \tilde{\tau}) = (2x_1^2 - 2x_1x_2 + (x_1 - x_2)e^{-\tilde{\tau}})^2$ и является интегралом (11), что означает наличие у (11) невырожденного закона площадей. Отметим, что (9) не обладает законом площадей.

Список литературы

1. Наумович Н. Ф. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1984. № 2. С. 54.
2. Наумович Н. Ф. // Там же. № 1. С. 32.
3. Богданова М. Ю., Наумович Н. Ф. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 9. С. 1613.
4. Богданов Ю. С., Сыроид Ю. Б. Дифференц. уравнения. Минск, 1983.

Поступила в редакцию 18.06.84.

УДК 517.977

Л. Д. ЕРОВЕНКО

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОДВИЖНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

1. Рассмотрим задачу терминального управления

$$\begin{aligned} I(u) &= c'x(t_*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_0) = Gz, \\ f_* &\leq z \leq f^*, \quad Hx(t_*) = g, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [t_0, t_*]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $A(t) \in R^{n \times n}$, $b(t) \in R^n$, $t \in T$, — кусочно-непрерывные функции; $H \in R^{m \times n}$, $G \in R^{n \times r}$, $g \in R^m$, $c \in R^n$; $z, f_*, f^* \in R^r$ — постоянные матрицы и векторы-столбцы.