Некоторую трудность при отыскании нецелочисленного максимума могут представить ограничения $x \leqslant d$. Следующая теорема позволяет избавиться от таких ограничений.

Теорема 2. Пусть y — оптимальное решение задачи A', полученной из A после исключения ограничений $x \leqslant d$, и пусть $J = \{j \mid y_j \geqslant d_j\}$. Тогда найдется оптимальное решение x^* задачи A со свойством $x_j^* = d_j$ для всех $j \in J$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность М. М. Ковалеву за постановку задачи.

Поступила в редакцию 11.04.85.

УДК 519.21

В. Г. МЕДВЕДЕВ

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУХЭТАПНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Рассмотрим двухэтапную задачу стохастического линейного программирования (ДЗСЛП) [1—3] в следующей форме:

$$M\{c'(w)x + q'(w)y(x, w)\} \to \min, \quad A(w)x + y(x, w) = b(w), \quad (1.1)-(1.2)$$

$$l_*(w) \leqslant y(x, w) \leqslant l^*(w), \quad w \in W, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*. \quad (1.3)-(1.4)$$

Здесь x, d_*, d^* — детерминированные n-векторы; $\bar{c}(w)$, $w \in W$ — случайный n-вектор; $q(w)$, $b(w)$, $l_*(w)$, $l^*(w)$, $w \in W$ — случайные m-векторы; $A(w)$, $w \in W$ — случайная $m \times n$-матрица; W — пространство элементарных событий; $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Сведем задачу (1.1)—(1.4) к эквивалентной детерминированной задаче. Обозначим, $\bar{c} = M\{q'(w)A(w) - \bar{c}(w)\}$, $b_*(w) = b(w) - l^*(w)$, $b^*(w) = b(w) - l_*(w)$. Выразим вектор $y(x, w)$ из (1.2):

$$y(x, w) = b(w) - A(w)x \quad (1.5)$$

и подставим его в (1.1) и (1.3). Получим детерминированную задачу

$$c'x \to \max, \quad b_*(w) \leqslant A(w)x \leqslant b^*(w), \quad w \in W, \quad (1.6)-(1.7)$$

$$d_* \leqslant x \leqslant d^*. \quad (1.8)$$

Решение ее обозначим через x^0. Подставив его в (1.5), получим векторы $y(x^0, w)$, $w \in W$. В зависимости от статистических характеристик случайных параметров задачи рассмотрим два случая.

а. Распределение случайных параметров дискретно. При этом множество W имеет вид $W = \{w_1, \ldots, w_N\}$, и задача (1.1)—(1.4) является ДЗСЛП с конечным множеством состояний природы W, а задача (1.6)—(1.8)— интервальной задачей линейного программирования.

б. Распределение случайных параметров не является дискретным. Пусть множество W имеет вид $W = [w_*, w^*]$. Тогда задача (1.1)—(1.4) является ДЗСЛП с непрерывным множеством состояний природы W, а задача (1.6)—(1.8)— задачей линейного программирования с континуумом ограничений.

2. Вектор x, удовлетворяющий ограничениям задачи (1.6)—(1.8), называем планом. Решение x^0 задачи — оптимальный план. Субоптимальным (ε-оптимальным) планом будем называть такой план x^ε, что $c'x^0 - c'x^\varepsilon \leqslant \varepsilon$. Составим пары $t = (i \mid w)$ из элементов $w \in W$ и индексов $i \in I$. Множество всевозможных пар обозначим через T.

Совокупность $K_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$, $|T_{\text{оп}}| = |J_{\text{оп}}|$ из множества пар $T_{\text{оп}} \subset T$ и множества индексов $J_{\text{оп}} \subset J$ назовем опорой задачи (1.6)—(1.8), если невырождена опорная матрица

$$A_{\text{оп}} = A(T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) = \begin{pmatrix} a_j(i \mid w), & j \in J_{\text{оп}} \\ & (i \mid w) \in T_{\text{оп}} \end{pmatrix},$$

где $a_j(i|w)$ — элемент матрицы $A(w)$, стоящий в j-ом столбце и i-ой строке.

Пара $\{x, K_{оп}\}$ из плана и опоры — опорный план. Опорный план считается невырожденным, если $d_{*j} < x < d_j^*$, $j \in \dot{J}_{оп}$, $b_*(i|w) < A'(i|w)x < b^*(i|w)$, $(i|w) \in T \setminus T_{оп}$, где $b(i|w)$ — i-ый элемент вектора $b(w)$, $A'(i|w)$, i-ая строка матрицы $A(w)$.

3. Пусть $\{x, K_{оп}\}$ — начальный опорный план. По нему подсчитаем вектор потенциалов $u' = u'(T_{оп}) = c'(\dot{J}_{оп})A_{оп}^{-1}$ и вектор оценок $\Delta' = \Delta'(\dot{J}) = u'A(T_{оп}, \dot{J})$. Следуя [4], доказывается

Критерий оптимальности. Соотношения $\Delta_j \geqslant 0$ при $x_j = d_{*j}$; $\Delta_j \leqslant 0$ при $x_j = d_j^*$; $\Delta_j = 0$ при $d_{*j} < x_j < d_j^*$, $j \in \dot{J}_H = \dot{J} \setminus \dot{J}_{оп}$; $u(i|w) \geqslant 0$ при $A'(i|w)x = b^*(i|w)$; $u(i|w) \leqslant 0$ при $A'(i|w) = b_*(i|w)$; $u(i|w) = 0$ при $b_*(i|w) < A'(i|w)x < b^*(i|w)$, $(i|w) \subset T_{оп}$ достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного плана $\{x, K_{оп}\}$.

4. Обозначим $\dot{J}_H = \dot{J} \setminus \dot{J}_{оп}$, $J_H^+ = \{j \in \dot{J}_H : \Delta_j > 0\}$, $\dot{J}_H^- = \{j \in J_H : \Delta_j < 0\}$, $T_{оп}^+ = \{(i|w) \in T_{оп} : u(i|w) > 0\}$, $T_{оп}^- = \{(i|w) \in T_{оп} : u(i|w) < 0\}$. Число

$$\beta = \beta(x, K_{оп}) = \sum_{j \in \dot{J}_{оп}^+} \Delta_j (x_j - d_{*j}) + \sum_{j \in \dot{J}_{оп}^-} \Delta_j (x_j - d_j^*) +$$

$$+ \sum_{(i|w) \in T_{по}^+} u(i|w)(b^*(i|w) - A'(i|w)x) +$$

$$+ \sum_{(i|w) \in T_{оп}^-} u(i|w)(b_*(i|w) - A'(i|w)x)$$

назовем оценкой субоптимальности опорного плана $\{x, K_{оп}\}$, ибо справедлив [4]

Критерий субоптимальности. При любом $\varepsilon > 0$ для ε-оптимальности плана x необходимо и достаточно существования такой опоры $K_{оп}$, что $\beta(x, K_{оп}) \leqslant \varepsilon$.

Основная итерация разбивается на два шага: прямой и двойственный. Затем применяется процедура доводки. Метод разработан на основе адаптивного метода, изложенного в [4—5].

5. По алгоритму составлена программа и проведено около 20 численных экспериментов на ЕС-1022. Задача ставилась следующим образом: случайные параметры A, b, c, d, l_*, l^* считались зависящими некоторым образом от случайной величины ξ. Какое значение примет ξ, неизвестно, однако известно множество ее значений. До получения конкретной реализации необходимо найти предварительный план x^0 и векторы коррекции $y(x^0, \xi)$. Для вектора целевой функции $\bar{c}$ вычислялась оценка его математического ожидания. Размеры задач имели вид: $m=20$, $n=15$. Функциональная зависимость случайных параметров от ξ выбиралась следующим образом: 1) $Q(\xi) = Q_1 \cdot \xi + Q_2$; 2) $Q(\xi) = Q_1 \sin(10\xi) + Q_2$; 3) $Q(\xi) = Q_1\xi^2 + Q_2\xi + Q_3$; 4) $Q(\xi) = Q_1 \cdot \sin^2(10\xi) + Q_2 \sin(10\xi) + Q_3$, где Q имеет смысл параметров A, b, c, d, l_*, l^*.

Вначале решались ДЗСЛП с конечным множеством W. Для случайной величины ξ строилась выборка объема 100 из равномерного распределения на отрезке [0; 1]. Время решения задач от 2 до 10 мин. Затем решалась ДЗСЛП с непрерывным множеством состояний природы. Случайная величина ξ выбиралась распределенной равномерно на отрезке [0; 1]. Задачи решались для всего отрезка [0; 1]. Функциональная зависимость параметров от ξ комбинировалась различными способами. Время решения колебалось от 2 до 18 мин от вида функциональной зависимости параметров задачи. В двух случаях алгоритм использовал процедуру доводки. В литературе по ДЗСЛП отсутствуют результаты численных экспериментов, поэтому сравнить эффективность предложенного алгоритма с другими не удалось

Список литературы

1. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М., 1974.
2. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. М., 1976.
3. Dantzig G. B.// Manag. Sci. 1955. V. 1. № 2.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Минск, 1980.
5. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. Консруктивные методы оптимизации. Минск, 1984.

Поступила в редакцию 14.11.85.

УДК 535.2/3.01

А. И. УРБАНОВИЧ

ВЫНУЖДЕННОЕ ЧЕТЫРЕХФОТОННОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА В РЕЖИМЕ «ВТОРОГО ЗВУКА»

Возникновение в некоторых кристаллах при достаточно низких температурах эффекта «второго звука» [1, 2] связано с инерционностью отклика среды при ее тепловом возбуждении. Это означает, что при неоднородном нагреве появляющийся в среде тепловой поток в данный момент времени определяется градиентом температуры в предшествующие моменты. С физической точки зрения такая нелокальность связи во времени градиента температуры и теплового потока приводит к замене обычного диффузионного механизма распространения тепла волновым, т. е. режимом «второго звука». Возникающие при неоднородном нагреве среды механические напряжения приводят к появлению акустических волн — волн первого звука. Рассеяние света в таких условиях и называется рассеянием в режиме «второго звука».

Впервые вынужденное рассеяние света на распространяющихся температурных волнах в изотропных средах было теоретически рассмотрено в работе [3]. Батра и Эннс, применив теорию вынужденного температурного рассеяния (ВТР), развитую Германом и Греем [4], получили выражение для коэффициента усиления слабого излучения при ВТР в режиме второго звука с учетом рассеяния на волнах первого звука [5]. Оптическая регистрация второго звука в кристаллах произведена в работе [6].

В данной работе приводятся результаты анализа стационарного вынужденного четырехфотонного параметрического рассеяния (ВЧПР) света в режиме второго звука.

Система уравнений, описывающая процесс взаимодействия излучения со средой, может быть записана в виде [5]

$$\Delta E-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}-2\frac{\alpha c}{n}\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\tau_{\text{р}}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{\partial T}{\partial t}-a\xi\Delta T-\frac{4}{5}a\xi\tau_{\text{н}}\frac{\partial}{\partial t}\Delta T-$$
$$-\frac{T_0F}{\rho_0C_V}\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{nc\alpha E^2}{4\pi C_V\rho_0}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\Delta\left\{\frac{B_T}{\rho_0}U+\frac{F}{\rho_0}T+\frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{y}{8\pi\rho_0}E^2\right\}, \tag{3}$$

где $P=\frac{1}{4\pi}\times\left[yU+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho T\right]E$ — нелинейная поляризованность среды;