

Теорема. Пусть y_1, y_2, y_3 — произвольные различные частные решения уравнения (1). Уравнение (1) имеет общее решение вида (7) тогда и только тогда, когда интегрирующий множитель уравнения

$$\frac{d(y-y_1)}{y-y_1} + \frac{(y_3-y_1)d(y-y_2)}{(y_2-y_3)(y-y_2)} + \frac{(y_1-y_2)d(y-y_3)}{(y_2-y_3)(y-y_3)} = 0 \quad (9)$$

не зависит от y .

Доказательство. Заметим прежде всего, что из выполнения условия (5) следует существование интегрирующего множителя уравнения (9). Докажем достаточность. Правая часть соотношения (3) после умножения на интегрирующий множитель $\mu(y_1, y_2, y_3)$ становится также дифференциалом функции

$$\int f_3(x) (y_1(x) - y_2(x)) (y_1(x) - y_3(x)) \mu(y_1(x), y_2(x), y_3(x)) dx.$$

Уравнение (3) и, значит, (1), интегрируются.

Необходимость. Так как уравнение (3), равносильное (1), интегрируется одним соотношением, то существует интегрирующий множитель. Умножим на него уравнение (3). Полученное соотношение будет уравнением в полных дифференциалах лишь в том случае, когда интегрирующий множитель не зависит от переменной y . Теорема доказана.

При выполнении соотношения (8) уравнение (3) имеет вид

$$\frac{d(y-y_1)}{y-y_1} - (\alpha+1) \frac{d(y-y_2)}{y-y_2} + \alpha \frac{d(y-y_3)}{y-y_3} = f_3(x) (y_1-y_2) (y_1-y_3) dx,$$

и общее решение уравнения (1) в этом случае:

$$(y-y_1)(y-y_2)^{-\alpha-1}(y-y_3)^\alpha = C \exp\left(\int f_3(x) (y_1-y_2) (y_1-y_3) dx\right).$$

Пример [6]. Решения $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \frac{af(x) + bg(x)}{a+b}$ уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = & (y-f(x))(y-g(x)) \left(y - \frac{af(x) + bg(x)}{a+b} \right) h(x) + \\ & + \frac{y-g(x)}{f(x)-g(x)} f'(x) + \frac{y-f(x)}{g(x)-f(x)} g'(x) \end{aligned}$$

при $f(x) \neq g(x)$ удовлетворяют условию (8). Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} (y-f(x))(y-g(x)) \frac{b}{a} \left(y - \frac{af(x) + bg(x)}{a+b} \right)^{-\frac{a+b}{a}} = \\ = C \exp \left(\frac{b}{a+b} \int (f(x) - g(x))^2 h(x) dx \right). \end{aligned}$$

Список литературы

1. Копвиллем У. Х., Сабурова Р. В. Параэлектрический резонанс. М., 1982.
2. Чудновский В. М., Холодкевич Е. Д. // ФТТ. 1982. Т. 24. Вып. 4. С. 1118.
3. Пфейфер Ю. В. // Ж. матем. цикла АН УССР. 1932. Т. 1. С. 33.
4. Дьедоне Ж. Основы современного анализа. М., 1964.
5. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск, 1982.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.

Поступила в редакцию 19.10.85.

УДК 519.283

И. И. ХОМИЧКОВ

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

Постановка задачи. Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания, в которую поступает рекуррентный поток вызовов. Назовем их первичными. Поступивший первичный вызов, застав обслуживаю-

ший прибор системы свободным, поступает на обслуживание, в противном случае он образует источник повторных вызовов. Каждый источник повторных вызовов посылает на обслуживающий прибор простейший поток вызовов с интенсивностью ν . Назовем эти вызовы повторными. Если при поступлении повторного вызова прибор свободен, этот вызов начинает обслуживаться, а число источников повторных вызовов уменьшается на единицу. Если же в момент поступления повторного вызова обслуживающий прибор занят, то состояние системы не меняется.

Пусть $A(t)$ — ф. р. промежутков времени между поступлениями первичных вызовов, m — ее первый момент. Время обслуживания первичного и повторного вызовов распределено по показательному закону с параметром μ .

При рассмотрении систем с повторными вызовами обычно предполагают, что входящий поток вызовов является простейшим [1, 2]. Однако в действительности потоки вызовов в узлы коммутаций имеют более сложный характер и не всегда адекватно аппроксимируются простейшими потоками. В настоящей статье рассмотрены системы с эрланговским и квазигиперэкспоненциальным входящими потоками вторых порядков.

Введем необходимые обозначения. Пусть для произвольного момента времени t : $n_t = 0, 1, 2, \dots$ — число источников повторных вызовов в системе, $k_t = 0, 1$ — число вызовов на приборе. Пусть $p_{n,k}$, $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1$ — стационарные вероятности состояний процесса (n_t, k_t) , P_0 — стационарная вероятность, что прибор свободен, P_1 — стационарная вероятность занятости прибора; N — среднее число источников повторных вызовов в установившемся режиме. Приведем без доказательства две леммы.

Лемма 1. Условия $1/m\mu < 1$, $\nu > 0$ являются необходимыми и достаточными для существования стационарного распределения состояний процесса (n_t, k_t) .

Лемма 2. Если существуют вероятности P_0 и P_1 , то они равны: $P_0 = 1 - 1/m\mu$, $P_1 = 1/m\mu$.

Введем в рассмотрение производящие функции стационарных вероятностей $p_{n,k}$ процесса (n_t, k_t) . Пусть $P_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,k} x^n$, $k = 0, 1$.

Теорема 1. Если $A(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$ и $\nu > 0$, $\lambda/2\mu < 1$, то

$$P_0(x) = C \frac{\lambda\mu - \lambda^2 x + 2\mu^2}{\mu^2} F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) - C \frac{\nu\alpha\beta((\mu-\lambda x)^2 - \mu^2 x)}{\lambda\mu^2\gamma(x_2-x_1)} F\left(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right), \quad (1)$$

$$P_1(x) = C \frac{\lambda}{\mu} \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) + C \frac{\nu\alpha\beta(\mu(x-1) + \lambda x)}{\mu^2\gamma(x_2-x_1)} F\left(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right), \quad (2)$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ — гипергеометрическая функция; $\alpha = \lambda/\nu$; $\beta = (\lambda + \nu)/\nu$; $\gamma = \frac{2\lambda\mu(\lambda + \mu) + \mu\nu(2\nu + \mu)}{\nu\lambda^2(x_2 - x_1)} - \frac{2(\nu + \lambda)x_1}{\nu(x_2 - x_1)}$; $C = \mu/2 \left((\mu + \lambda) F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1-x_1}{x_2-x_1}\right) + \frac{\nu\alpha\beta}{\gamma(x_2-x_1)} F\left(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; \frac{1-x_1}{x_2-x_1}\right) \right)$; $x_1 < x_2$ — корни квадратного уравнения $(\mu - \lambda x)^2 - \mu^2 x = 0$.

Доказательство. Согласно условию теоремы, входящий поток является эрланговским второго порядка. Используем метод фаз Эрланга [3], т. е. будем считать, что в систему поступает пуассоновский поток фаз с параметром λ , обслуживаются они парами в течение экспоненциального времени с параметром μ . Определим для произвольного момента времени t : $\bar{n}_t = 0, 1, 2, \dots$ — число фаз поступления в систему, $\bar{k}_t = 0, 1$ — число пар фаз на обслуживании. Пусть $q_{n,k}$, $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1$ — стационарные вероятности состояний процесса $(\bar{n}_t, \bar{k}_t)$,

которые существуют в силу леммы 1, условия теоремы и следующего очевидного соотношения $p_{n,k} = q_{2n,k} + q_{2n+1,k}$, $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1$. Введем производящие функции стационарных вероятностей $q_{n,k}$. Пусть $P_{j,k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{2n+j,k} x^n$, $j = 0, 1$, $k = 0, 1$, тогда

$$P_k(x) = P_{0,k}(x) + P_{1,k}(x), \quad k = 0, 1. \quad (3)$$

Методом сечения [4] графа интенсивностей переходов цепи Маркова $(\bar{n}_t, \bar{k}_t)$ запишем уравнения равновесия для стационарных вероятностей $q_{n,k}$:

$$\begin{aligned} \mu q_{2n+1,1} + (n+1) \nu q_{2n+2,0} &= \lambda q_{2n,1}, \\ (\mu + \lambda) q_{2n+1,1} &= \nu (n+1) q_{2n+3,0} + \lambda q_{2n,1}, \\ \lambda q_{2n+1,0} + \lambda q_{2n-1,1} &= \mu q_{2n+1,1} + \mu q_{2n,1}, \\ \lambda q_{2n,0} + \lambda q_{2n-2,1} &= \mu q_{2n,1} + \mu q_{2n-1,1}, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

которые в терминах производящих функций примут вид

$$\begin{aligned} ((\mu - \lambda x)^2 - \mu^2 x) P'_{0,0}(x) &= \lambda (\lambda \mu - \lambda^2 x + \mu^2) P_{0,0}(x) - \lambda \mu^2 P_{1,0}(x), \\ ((\mu - \lambda x)^2 - \mu^2 x) \nu P'_{1,0}(x) &= \lambda (\lambda^2 x - 2\lambda \mu - \mu^2) P_{0,0}(x) + \\ &+ \lambda (\lambda \mu - \lambda^2 x + \mu^2) P_{1,0}(x), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} P_{1,1}(x) &= ((\mu - \lambda x) \lambda P_{1,0}(x) - \mu \lambda P_{0,0}(x)) / ((\mu - \lambda x)^2 - \mu^2 x), \\ P_{0,1}(x) &= ((\mu - \lambda x) \lambda P_{0,0}(x) - \mu \lambda x P_{1,0}(x)) / ((\mu - \lambda x)^2 - \mu^2 x). \end{aligned} \quad (6)$$

Из уравнений (5) получаем

$$\begin{aligned} ((\mu - \lambda x)^2 - \mu^2 x) P''_{0,0}(x) - \frac{1}{\nu} (2\lambda \mu (\lambda + \mu) + \mu \nu (2\lambda + \mu) - \\ - 2\lambda^2 (\lambda + \nu) x) P'_{0,0}(x) + \frac{\lambda^3}{\nu^2} (\nu + \lambda) P_{0,0}(x) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Сделаем замену переменных $x = x_1 + (x_2 - x_1)z$, где $0 < x_1 < 1$, $x_2 < 1$ — действительные корни квадратного уравнения $(\mu - \lambda x)^2 - \mu^2 x = 0$, выше приведенное расположение которых определяется условием $\lambda/2\mu < 1$. Тогда уравнение (7) преобразуется к известному уравнению Гаусса [5], аналитическим решением которого в круге $|z| < 1$ является гипергеометрическая функция. Возвращаясь к переменной x , получим

$$P_{0,0}(x) = CF\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right), \quad (8)$$

где $|x - x_1| < x_2 - x_1$, α, β, γ даны в формулировке теоремы. Из первого уравнения (5) следует

$$\begin{aligned} P_{1,0}(x) &= \frac{C}{\mu^2} \left((\lambda \mu - \lambda^2 x + \mu^2) F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) - \right. \\ &- \left. \frac{\nu \alpha \beta C}{\lambda \gamma (x_2 - x_1)} ((\mu - \lambda x)^2 - \mu^2 x) F\left(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

а из (6) находим $P_{0,1}(x)$ и $P_{1,1}(x)$. Для получения константы C используем равенство $P_{0,0}(1) + P_{1,0}(1) = 1 - \lambda/2\mu$, которое следует из определения вероятности P_0 , леммы 2 и выражения (3). Производящие функции (1) и (2), согласно (3), получаются суммированием соответственно (8), (9) и полученных выражений для $P_{0,1}(x)$ и $P_{1,1}(x)$.

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$\begin{aligned} N = C \frac{2\mu\lambda - \mu\nu}{\nu(2\mu - \lambda)} \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 - x_1}{x_2 - x_1}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\nu \alpha \beta (\mu - \lambda)}{\gamma \mu^2 (x_2 - x_1)} F\left(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; \frac{1 - x_1}{x_2 - x_1}\right) \right) + \frac{\lambda^2}{2\mu(2\mu - \lambda)}, \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, C, x_1, x_2$ определены в теореме 1.

Теорема 2. Если $A(t) = 1 - a_1 e^{-\lambda_1 t} - a_2 e^{-\lambda_2 t}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $v > 0$, то

$$P_0(x) = C \frac{\mu^2 (a_1 \lambda_2 + a_2 \lambda_1) + \lambda_1^2 \mu - \lambda_1 x (\lambda_1 \lambda_2 + \mu (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2))}{\mu^2 \lambda_2} \times F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) -$$

$$C \frac{v \alpha \beta ((\lambda_1 \lambda_2 + \mu (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1)) x^2 - \mu (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) x + \mu^2)}{\gamma \mu^2 \lambda_2 (x_2 - x_1)} \times$$

$$\times F\left(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right);$$

$$P_1(x) = C \frac{\lambda_1^2 + \lambda_1 \mu}{\mu^2} F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) -$$

$$- C \frac{\alpha \beta v (\mu (x - 1) + x \lambda_1)}{\gamma (x_2 - x_1) \mu^2} F\left(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right),$$

где $\alpha = (\lambda_2 + v)/v$; $\beta = \lambda_1/v$;

$$\gamma = \frac{\mu (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + v \mu (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) - \mu^2 (\lambda_2 a_1 + \lambda_1 a_2)}{v (x_2 - x_1) (\lambda_1 \lambda_2 + \mu (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2))} -$$

$$- \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + 2v}{v} \cdot \frac{x_1}{x_2 - x_1};$$

$$C = \mu / (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1) \left(\frac{\lambda_1 + \mu}{\lambda_2} F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1 - x_1}{x_2 - x_1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha \beta v}{\gamma (x_2 - x_1) \lambda_2} F\left(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; \frac{1 - x_1}{x_2 - x_1}\right) \right);$$

$x_1 < x_2$ — корни квадратного уравнения $(\lambda_1 \lambda_2 + \mu (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)) x^2 - \mu \times (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) x + \mu^2 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим процесс Маркова (n_t, k_t, ζ_t) , где компоненты n_t, k_t определены выше, а ζ_t — длительность времени обслуживания вызова к моменту t , если прибор занят. Введем стационарные вероятности этого процесса $p_{n,k}(\tau) d\tau$, которые существуют в силу условия теоремы и леммы 1. Пусть $P_k(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,k}(\tau) x^n$, $k = 0, 1$, тогда

$$P_k(x) = \int_0^{\infty} P_k(x, \tau) d\tau, k = 0, 1. \text{ Рассматривая переход процесса } (n_t, k_t, \zeta_t)$$

за бесконечно малый промежуток времени, обычным способом запишем систему дифференциальных уравнений относительно функций $P_k(x, \tau)$, $k = 0, 1$, которая после замены $G_k(x, \tau) = P_k(x, \tau) / (1 - A(\tau))$, $k = 0, 1$ примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G_0(x, \tau) = -vx \frac{\partial}{\partial x} G_0(x, \tau) + \mu G_1(x, \tau),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G_1(x, \tau) = -\mu G_1(x, \tau) + v \frac{\partial}{\partial x} G_0(x, \tau), \quad (10)$$

$$G_0(x, 0) = 0, \quad G_1(x, 0) = \int_0^{\infty} (x G_1(x, \tau) + G_0(x, \tau)) dA(\tau).$$

После несложных преобразований граничное условие в (10) перепишем в виде

$$G_1(x, 0) = \mu \int_0^{\infty} (1 - A(\tau)) G_1(x, \tau) d\tau. \quad (11)$$

Преобразование Лапласа уравнений (10) даст

$$s G_0^*(x, s) = -vx \frac{\partial}{\partial x} G_0^*(x, s) + \mu G_1^*(x, s),$$

$$s G_1^*(x, s) - G_1(x, 0) = -\mu G_1^*(x, s) + v \frac{\partial}{\partial x} G_0^*(x, s), \quad (12)$$

где $G_k^*(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} G_k(x, t) dt$, $k = 0, 1$. Обозначим $P_{k,i}(x) = G_k^*(x, \lambda_{i+1})$,

$k, i = 0, 1$, тогда из вида функции $A(t)$, выражения (11) и уравнений (12) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $P_{k,i}(x)$, $k, i = 0, 1$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_{0,0}(x) &= -vx P'_{0,0}(x) + \mu P_{1,0}(x), \\ \lambda_2 P_{0,1}(x) &= -vx P'_{0,1}(x) + \mu P_{1,1}(x), \\ (\lambda_1 + \mu a_1) P_{1,0}(x) - \mu a_2 P_{1,1}(x) &= v P'_{0,0}(x), \\ (\lambda_2 + \mu a_2) P_{1,1}(x) - \mu a_1 P_{1,0}(x) &= v P'_{0,1}(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Решая систему (13) и учитывая, что $P_k(x) = \int_0^\infty P_k(x, \tau) d\tau = \int_0^\infty (1 - A(\tau)) G_k(x, \tau) d\tau = a_1 P_{k,0}(x) + a_2 P_{k,1}(x)$, $k = 0, 1$, получим результаты теоремы 2.

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 2, то

$$\begin{aligned} N &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 \mu (\lambda_2 a_1 + \lambda_1 a_2) + v (\lambda_1 \lambda_2 + \mu a_1 (\lambda_1 - \lambda_2)))}{\mu v (a_1 \lambda_2 + a_2 \lambda_1) (\mu (\lambda_1 a_2 + a_1 \lambda_2) - \lambda_1 \lambda_2)} + \\ &+ \frac{a_1 (\lambda_1 - \lambda_2) \mu (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 - v) C}{v (\mu (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1) - \lambda_1 \lambda_2)} \times \left(\frac{\lambda_1}{\mu} F\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1-x_1}{x_2-x_1}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{v \alpha \beta}{\gamma (x_2 - x_1)} F\left(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; \frac{1-x_1}{x_2-x_1}\right) \right), \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2, C$ определены в теореме 2.

Список литературы

1. Фалин Г. И. // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1979. № 2. С. 107.
2. Фалин Г. И. // Укр. матем. ж. 1976. Т. 28. № 4. С. 96.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М., 1979.
4. Медведев Г. А. // Автоматика и вычислительная техника. 1968. № 4. С. 27.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1974. Т. 3. Ч. 2.