плей произвольную последовательность служебных и текстовых символов, что дает возможность использовать в рамках АОС-ВУЗ, ориентированной на применение стандартного дисплейного оборудования, расширенные возможности терминалов АТОС.

Одной из отличительных особенностей терминалов АТОС является наличие дополнительных 32 клавишей ускоренного набора (операторы). Каждая из этих клавишей может быть запрограммирована по команде из ЭВМ. Основное назначение этой группы клавишей — оказание помощи обучаемому при наборе текста ответа. Однако программирование этой клавиатуры — процесс непростой и трудоемкий. Кроме клавиатуры ускоренного набора, терминал АТОС предоставляет автору возможность программировать знаки произвольного начертания, т. е. имеет частично программируемый генератор знаков.

Для автоматической реализации этих возможностей разработаны функции OPER и OPERLD, а также курс СЕРВИС. Программирование с их помощью не требует от пользователя детального знакомства с функционированием спецпроцессора АТОС и форматами информационных потоков. Например, при программировании генератора знаков пользователю на экран предъявляется шаблон в растре 8×8 клеток, в которых он может отметить произвольные позиции и тем самым получить конфигурацию нужного ему знака. Полученный набор знаков и содержимое клавишей ускоренного набора запоминается в файле прямого доступа (при реализации с помощью функций) или во вспомогательной памяти (при реализации в курсе СЕРВИС) и могут быть вызваны в любой момент подготовки или прохождения курса. Кроме того, курс СЕРВИС позволяет распечатать линейку индикации операторов, клавишей ИВ и др. Подключение к курсу: АТОС / СЕРВИС. Разработанный комплекс специализированных программных средств позволяет оптимизировать процесс подготовки автоматизированных учебных курсов, работу студентов в дисплейных классах АТОС, расширяет рамки использования АОС. Применение описанных средств при подготовке АУК и в реальном учебном процессе по ряду нетрадиционных для АОС дисциплин (биохимия, физиология растений, генетика, английский язык, философия, криминалистика и др.) показало их достаточную эффективность и работоспособность.

Поступила в редакцию 23.07.85.

УДК 517.911

А. А. САМОДУРОВ

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ ПО ИЗВЕСТНЫМ ЧАСТНЫМ РЕШЕНИЯМ

С развитием методов аналитической и качественной теории задача нахождения интегрируемых в конечном виде дифференциальных уравнений потеряла свою актуальность. Однако в последнее время все чаще приходят к изучению физических явлений, описываемых существенно нелинейными дифференциальными уравнениями. Для получения достоверной информации о возможном развитии физического процесса необходимо проинтегрировать либо полученные уравнения, либо уравнения, структурно близкие к исследуемым. Например, при решении некоторых задач когерентной спектроскопии [1, 2] приходят к дифференциальному уравнению Абеля

$$\frac{dy}{dx} = f_3(x)\, y^3 + f_2(x)\, y^2 + f_1(x)\, y + f_0(x). \qquad (1)$$

Как правило, в рассматриваемых задачах одно или несколько частных решений этого уравнения известны. Будем предполагать, что коэффициенты в правой части уравнения (1) непрерывны и обеспечивают существование и единственность решения локальной задачи Коши, $f_3(x) \not\equiv 0$ — непрерывно дифференцируема.

Известно [3], что общее решение уравнения (1) нельзя записать в виде функции его частных решений, как, например, это можно сделать для уравнения Риккати. Ниже будет получен критерий возможности представления общего решения уравнения (1) в виде функции трех его частных решений и независимой переменной x.

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ — различные частные решения уравнения (1). Тогда

$$\frac{dy_i}{dx} \equiv f_3(x)\, y_i^3 + f_2(x)\, y^2 + f_1(x)\, y + f_0(x),\ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) получаем последовательно

$$\frac{d(y-y_i)}{y-y_i} = (f_3(x)(y^2 + yy_i + y_i^2) + f_2(x)(y+y_i) + f_1(x))\, dx,\ i = 1, 2, 3;$$

$$\frac{\dfrac{d(y-y_1)}{y-y_1} - \dfrac{d(y-y_2)}{y-y_2}}{y_1 - y_2} = (f_3(x)(y + y_1 + y_2) + f_2(x))\, dx,$$

$$\frac{\dfrac{d(y-y_1)}{y-y_1} - \dfrac{d(y-y_3)}{y-y_3}}{y_1 - y_3} = (f_3(x)(y + y_1 + y_3) + f_2(x))\, dx;$$

$$\frac{d(y-y_1)}{y-y_1} + \frac{y_3 - y_1}{(y_2 - y_3)(y - y_2)}\, d(y-y_2) + \frac{y_1 - y_2}{(y_2 - y_3)(y - y_3)} \times$$
$$\times\, d(y - y_3) = f_3(x)(y_1 - y_3)(y_1 - y_2)\, dx. \tag{3}$$

Обозначим: $z_1 \equiv y - y_1$, $z_2 \equiv y - y_2$, $z_3 \equiv y - y_3$, $P \equiv \frac{1}{z_1}$, $Q \equiv \equiv \frac{z_1 - z_3}{(z_3 - z_2)\, z_2}$, $R \equiv \frac{z_2 - z_1}{(z_3 - z_2)\, z_3}$, $S \equiv -f_3(x)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = -f_3(x) \times \times (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)$. Соотношение (3) перепишется в виде

$$Pdz_1 + Qdz_2 + Rdz_3 + Sdx = 0. \tag{4}$$

Общее решение уравнения (1) будет функцией переменных x, z_1, z_2, z_3 (и, следовательно, функцией переменных x, y, y_1, y_2, y_3) тогда и только тогда, когда уравнение Пфаффа (4) является вполне интегрируемым. Критерий полной интегрируемости уравнения (4) записывается в виде системы трех тождеств [4], первые два из которых имеют вид

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z_3} - \frac{\partial R}{\partial z_2}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial z_1} - \frac{\partial P}{\partial z_3}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial z_2} - \frac{\partial Q}{\partial z_1}\right) \equiv 0, \tag{5}$$

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial z_3}\right) + R\left(\frac{\partial S}{\partial z_1} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) + S\left(\frac{\partial P}{\partial z_3} - \frac{\partial R}{\partial z_1}\right) \equiv 0. \tag{6}$$

Легко проверить, что условие (5) для уравнения (4) выполнено. Левая часть соотношения (6) в развернутом виде запишется следующим образом:

$$\frac{y_1 - y_2}{y - y_1} + \frac{(y_1 - y_2)^2}{(y_2 - y_3)(y - y_3)} \tag{7}$$

и, следовательно, тождество (6) не выполняется. Отсюда следует, что уравнение (4) не интегрируется одним соотношением, и общее решение уравнения (2) может быть представлено в виде $F(x, y, y_1, y_2, y_3) = C$, где F — непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов лишь при наличии определенной функциональной зависимости между x, y_1, y_2, y.

Известно [5], что если некоторые частные решения уравнения (1) удовлетворяют соотношению

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} \equiv \alpha = \text{const}, \tag{8}$$

то уравнение (1) интегрируется в квадратурах. Докажем более общее утверждение.

Теорема. Пусть y_1, y_2, y_3 — произвольные различные частные решения уравнения (1). Уравнение (1) имеет общее решение вида (7) тогда и только тогда, когда интегрирующий множитель уравнения

$$\frac{d(y-y_1)}{y-y_1}+\frac{(y_3-y_1)\,d(y-y_2)}{(y_2-y_3)(y-y_2)}+\frac{(y_1-y_2)\,d(y-y_3)}{(y_2-y_3)(y-y_3)}=0 \qquad (9)$$

не зависит от y.

Доказательство. Заметим прежде всего, что из выполнения условия (5) следует существование интегрирующего множителя уравнения (9). Докажем достаточность. Правая часть соотношения (3) после умножения на интегрирующий множитель $\mu(y_1, y_2, y_3)$ становится также дифференциалом функции

$$\int f_3(x)\,(y_1(x)-y_2(x))\,(y_1(x)-y_3(x))\,\mu(y_1(x), y_2(x), y_3(x))\,dx.$$

Уравнение (3) и, значит, (1), интегрируются.

Необходимость. Так как уравнение (3), равносильное (1), интегрируется одним соотношением, то существует интегрирующий множитель. Умножим на него уравнение (3). Полученное соотношение будет уравнением в полных дифференциалах лишь в том случае, когда интегрирующий множитель не зависит от переменной y. Теорема доказана.

При выполнении соотношения (8) уравнение (3) имеет вид

$$\frac{d(y-y_1)}{y-y_1}-(\alpha+1)\frac{d(y-y_2)}{y-y_2}+\alpha\frac{d(y-y_3)}{y-y_3}=f_3(x)(y_1-y_2)(y_1-y_3)\,dx,$$

и общее решение уравнения (1) в этом случае:

$$(y-y_1)(y-y_2)^{-\alpha-1}(y-y_3)^{\alpha}=C\exp\left(\int f_3(x)(y_1-y_2)(y_1-y_3)\right)dx.$$

Пример [6]. Решения $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\dfrac{af(x)+bg(x)}{a+b}$ уравнения

$$\frac{dy}{dx}=(y-f(x))(y-g(x))\left(y-\frac{af(x)+bg(x)}{a+b}\right)h(x)+$$
$$+\frac{y-g(x)}{f(x)-g(x)}f'(x)+\frac{y-f(x)}{g(x)-f(x)}g'(x)$$

при $f(x)\neq g(x)$ удовлетворяют условию (8). Общее решение имеет вид

$$(y-f(x))(y-g(x))^{\frac{b}{a}}\left(y-\frac{af(x)+bg(x)}{a+b}\right)^{-\frac{a+b}{a}}=$$
$$=C\exp\left(\frac{b}{a+b}\int(f(x)-g(x))^2h(x)\,dx\right).$$

Список литературы

1. Копвиллем У. Х., Сабурова Р. В. Параэлектрический резонанс. М., 1982.
2. Чудновский В. М., Холодкевич Е. Д.// ФТТ. 1982. Т. 24. Вып. 4. С. 1118.
3. Пфейфер Ю. В.// Ж. матем. цикла АН УССР. 1932. Т. 1. С. 33.
4. Дьедоне Ж. Основы современного анализа. М., 1964.
5. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск, 1982.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.

Поступила в редакцию 19.10.85.

УДК 519.283

И. И. ХОМИЧКОВ

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

Постановка задачи. Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания, в которую поступает рекуррентный поток вызовов. Назовем их первичными. Поступивший первичный вызов, застав обслуживаю-