

Общее решение интегрального уравнения (1) имеет вид: $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \tilde{\varphi}(x)$, $\alpha < x < \beta$, и зависит от одной произвольной постоянной.

Список литературы

1. Моисеев Н. Г., Попов Г. Я. // Механика деформируемых тел и конструкций. Ереван. 1974.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
3. Зверович Э. И., Померанцева Л. И. // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 1.
4. Зверович Э. И. // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. № 1.

Поступила в редакцию 27.06.85.

УДК 517.948.32:517.544

О. ДЖУРАЕВ

ЭФФЕКТИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ЧЕТЫРЕХЛИСТНОМУ НАКРЫТИЮ СФЕРЫ, И ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть R — замкнутая риманова поверхность, реализованная в виде 4-листной поверхности наложения сферы $\hat{C}$ [1]. Предположим, что заданы точки ветвления $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ и образующие группы монодромии:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется построить поле алгебраических функций, соответствующее заданному накрытию сферы $\hat{C}$, точки ветвления и образующие группы монодромии которого совпадали бы с заданными.

Легко проверить, что подстановки σ_1 , σ_2 , σ_3 не коммутируют между собой, и $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 = e$, где e — единичная подстановка. Пусть $\tilde{a} \in \hat{C}$ — отличная от a_1 , a_2 , a_3 точка. Соединяя точки a_1 , a_2 , a_3 с точкой $\tilde{a}$ линиями, направленными к $\tilde{a}$, и производя гомотопную деформацию, полученный контур превратим в контур, изображенный на рис. 1. Отрезок $[-1, 1]$ будем рассматривать как фиксированный разрез в плоскости и возьмем односвязную область $D = \hat{C} \setminus [-1, 1]$. Далее нетрудно показать, что группа монодромии, порожденная подстановками σ_1 , σ_2 , σ_3 , действует транзитивно и поэтому риманова поверхность R связна. Так как цикленные типы подстановок таковы: $(1, 1, 2)$, (4) , $(2, 2)$, то индекс ветвления поверхности R равен $\omega_z = 1 + 3 + 2 = 6$. По формуле Римана — Гур-

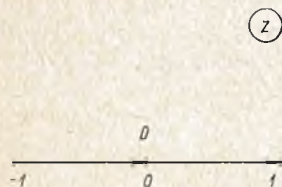


Рис. 1

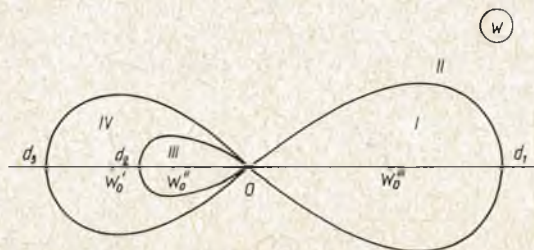


Рис. 2

вида находим ее род $\rho = \frac{1}{2}\omega_z - n + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$. Таким образом, R конформно эквивалентна сфере. Следовательно, на ней существует всюду мероморфная функция с единственным простым полюсом.

Как известно [4], если $f(z, w) = 0$ — алгебраическое уравнение римановой поверхности R , то его корни можно упорядочить так, что при переходе через разрез по отрезку $[-1, 1]$ они претерпевают изменения, которые в рассматриваемом случае можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} w_1^+(x) \\ w_2^+(x) \\ w_3^+(x) \\ w_4^+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^-(x) \\ w_2^-(x) \\ w_3^-(x) \\ w_4^-(x) \end{pmatrix} \quad \text{при } -1 < x < 0, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} w_1^+(x) \\ w_2^+(x) \\ w_3^+(x) \\ w_4^+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^-(x) \\ w_2^-(x) \\ w_3^-(x) \\ w_4^-(x) \end{pmatrix} \quad \text{при } 0 < x < 1.$$

Будем искать целый элемент $w(z)$, порождающий искомое поле. Этот элемент ищем как аналитическое решение краевой задачи (1), имеющее единственный простой полюс при $z \rightarrow \infty$ и ограниченное при $z \rightarrow 0$, $z \rightarrow \pm 1$.

Искомое решение задачи (1) должно удовлетворять следующему алгебраическому уравнению:

$$f(z, w) = w^4 + (\alpha z + \beta)w^3 + (\gamma z + \delta)w^2 + (\lambda z + \kappa)w + \mu z + \nu = 0, \quad (2)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \kappa, \mu, \nu$ — неизвестные коэффициенты.

Степень уравнения (2) по z равна единице, так как искомый элемент $w(z)$ должен иметь единственный простой полюс. Такой элемент существует, так как род римановой поверхности R равен нулю. Далее, так как $z = 0$ является точкой ветвления 4-го порядка, то, полагая $w(0) = 0$, заключаем, что при $z = 0$ уравнение (2) должно приводиться к виду $w^4 = 0$. Отсюда следует, что $\beta = \delta = \kappa = \nu = 0$, и уравнение (2) принимает вид:

$$f(z, w) = w^4 + \alpha zw^3 + \gamma zw^2 + \lambda zw + \mu z = 0. \quad (3)$$

Предположим, что при $z \rightarrow \infty$ соответствующая ветвь искомого решения имеет следующую асимптотику $w(z) \sim 4z$. Используя диаграмму Ньютона, заключаем, что $\alpha = -4$ и, следовательно,

$$f(z, w) = w^4 - 4zw^3 + \gamma zw^2 + \lambda zw + \mu z = 0. \quad (4)$$

Для нахождения остальных неизвестных γ, λ, μ исходим из того условия, что над точками $z = \pm 1$ поверхность R разветвляется по закону подстановок σ_1 и σ_3 соответственно, т. е. при $z = -1$ уравнение (4) приводится к виду: $w^4 + 4w^3 - \gamma w^2 - \lambda w - \mu = (w + c)^2(w^2 + mw + n) = w^4 + (m + 2c)w^3 + (c^2 + 2mc + n)w^2 + (2nc + mc^2)w + nc^2$, а при $z = 1$ к виду: $w^4 - 4w^3 + \gamma w^2 + \lambda w + \mu = (w + a)^2(w + b)^2 = w^4 + (2a + 2b)w^3 + (a^2 + b^2 + 4ab)w^2 + 2ab(a + b)w + a^2b^2$. Приравняв в этих равенствах коэффициенты при одинаковых степенях w , получаем системы:

$$\begin{cases} 2(a + b) = -4 \\ a^2 + b^2 + 4ab = \gamma \\ 2ab(a + b) = \lambda \\ a^2b^2 = \mu, \end{cases} \quad \begin{cases} m + 2c = 4 \\ c^2 + 2mc + n = -\gamma \\ 2nc + mc^2 = -\lambda \\ nc^2 = -\mu. \end{cases}$$

Исключая неизвестные a, b, c, m, n , после элементарных, но довольно

утомительных вычислений получим: $\lambda = -2(\gamma - 4)$, $\mu = \frac{1}{4}(\gamma - 4)^2$, где γ удовлетворяет уравнению

$$\gamma^4 - 12\gamma^3 - 54\gamma^2 - 32\gamma - 64 = 0. \quad (5)$$

При этом уравнение (4) принимает вид:

$$f(z, w) = w^4 - 4zw^3 + \gamma zw^2 - 2(\gamma - 4)zw + \frac{1}{4}(\gamma - 4)^2 z = 0. \quad (6)$$

Уравнение (5) не имеет рациональных корней, но один из его действительных корней лежит в интервале $]-4, -3[$, и его приближенное значение таково: $\gamma \approx -3,5$. Беря в уравнении (6) в качестве γ указанный корень (подразумевается точное значение корня), покажем, что решение w вместе с z порождает искомое поле. Прежде всего можно показать, что уравнение (6) неприводимо. Далее будем решать вопрос, как упорядочить корни уравнения (6), чтобы они удовлетворяли условиям сопряжения (1). С этой целью находим z из равенства (6):

$$z = \frac{w^4}{4w^3 - \gamma w^2 + 2(\gamma - 4)w - \frac{1}{4}(\gamma - 4)^2}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что $z \rightarrow \infty$ только при $w \rightarrow \infty$ или при $4w^3 - \gamma w^2 + 2(\gamma - 4)w - \frac{1}{4}(\gamma - 4)^2 \rightarrow 0$. Но корни уравнения $4w^3 - \gamma w^2 + 2(\gamma - 4)w - \frac{1}{4}(\gamma - 4)^2 = 0$ при указанном значении γ лежат соответственно в интервалах $]-2, -1[$, $]-1, 0[$, $]1, 2[$. Обозначим их соответственно через w_0'' , w_0' , w_0 . Таким образом, над точкой $z = \infty$ переменная w принимает четыре различных значения: w_0'' , ∞ , w_0' , w_0 . Функция, обратная к (7), реализует конформное отображение поверхности R на сферу $\hat{C}$. Так как степень уравнения (6) относительно z равна единице, то кривая (6) не имеет конечных особых точек (кроме точек ветвления), поэтому контур, лежащий на R над отрезком $[-1, 1]$, преобразуется на контур, изображенный на рис. 2, и разбивает $\hat{C}$ на четыре связные компоненты — I, II, III, IV (образы листов), содержащие соответственно точки w_0'' , ∞ , w_0' , w_0 (образы точки ∞).

Далее, при $z = 1$ кратными корнями уравнения (6) будут числа $d_1 = \frac{2 - \sqrt{19}}{2}$ и $d_2 = \frac{2 + \sqrt{19}}{2}$. Число d_1 лежит на общей границе областей I и II, а число d_2 — на общей границе областей III и IV. При $z = -1$ кратный корень d_3 лежит на общей границе областей II и IV. Отсюда следует, что в качестве решений векторно-матричной задачи Римана (1) надо взять однозначные в области D решения уравнения (6), удовлетворяющие следующим начальным условиям: $w_1(\infty) = w_0''$, $w_2(\infty) = \infty$, $w_3(\infty) = w_0'$, $w_4(\infty) = w_0$. Так как риманова поверхность R имеет род нуль, а степень уравнения (6) относительно z равна 1, то из формулы $d = (m - 1)(n - 1) - \rho$ [4] следует, что $d = 0$ и поэтому кривая (6) не имеет особых точек. Отсюда на основании теоремы Кронекера [4] заключаем, что фундаментальный базис поля алгебраических функций, заданного уравнением (6), совпадает со степенным базисом этого поля. Но этот базис не является нормальным. Преобразуя его [4], получим элементы нормального базиса $1, w, \frac{w^2}{z-1}, \frac{w^3}{z-1}$.

Таким образом, каноническая матрица $X(z)$ задачи (1) в выбранном нами классе функций может быть выражена через найденный базис по формуле:

$$X(z) = \begin{pmatrix} 1 & w_1(z) & \frac{w_1^2(z)}{z-1} & \frac{w_1^3(z)}{z-1} \\ 1 & w_2(z) & \frac{w_2^2(z)}{z-1} & \frac{w_2^3(z)}{z-1} \\ 1 & w_3(z) & \frac{w_3^2(z)}{z-1} & \frac{w_3^3(z)}{z-1} \\ 1 & w_4(z) & \frac{w_4^2(z)}{z-1} & \frac{w_4^3(z)}{z-1} \end{pmatrix},$$

ее частные индексы равны $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = -1$, $\kappa_3 = -1$, $\kappa_4 = -2$, а суммарный индекс равен $\kappa = \sum_{v=1}^4 \kappa_v = -4$.

Построенное поле алгебраических функций и каноническая матрица $X(z)$ позволяют решить в явном виде следующую неоднородную векторно-матричную задачу:

$$\Phi^+(x) = G(x) \cdot \Phi^-(x) + g(x), \quad x \in]-1, 0[\cup]0, 1[, \quad (8)$$

где $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z), \Phi_4(z))$ — неизвестная вектор-функция (столбец), аналитическая на $\hat{C} \setminus [-1, 1]$, исчезающая при $z = \infty$ и почти ограниченная при $z = 0$, $z = \pm 1$; $g(z)$ — непрерывная вектор-функция (столбец); $G(z)$ — матрица однородной задачи (1)

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ при } -1 < x < 0, \quad G(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ при } 0 < x < 1.$$

Используя теорию векторно-матричной задачи [5], а также построенную выше матрицу $X(z)$ и найденные частные индексы, заключаем, что неоднородная задача (8) имеет не более одного решения в выбранном классе. Решение представимо в виде:

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{[X^+(t)]^{-1} g(t)}{t-z} dt$$

с условиями разрешимости

$$\int_{-1}^1 t^k [X^+(t)]^{-1} dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Список литературы

1. Зверович Э. И. // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 2. С. 104.
2. Зверович Э. И., Померанцева Л. И. Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 1. С. 20.
3. Зверович Э. И. Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. № 1. С. 113.
4. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

Поступила в редакцию 27.06.85.

УДК 378:371.315.7

В. Н. БУРАКОВСКИЙ, Н. И. ЗЕЛЕНКОВ, Е. Н. БАЛЫКИНА

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЕ СРЕДСТВА ДИАЛОГА ДЛЯ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ОБУЧАЮЩИХ СИСТЕМ

Развитие вычислительной техники, массовое распространение дисплейного оборудования, появление специализированных систем программирования, ориентированных на применение в АОС (КОНТАКТ,