где $\hat{E}_i^*$ — множество ребер, исходящих из вершины i и отвечающих оптимальному заполнению емкости $B - c(i)$. Но поскольку вершины, соответствующие E_i^*, заполняют не обязательно полностью и оптимально емкость $B - c(i)$, то отсюда следует, что

$$w(\hat{E}_i^*) \geqslant w(E_i^*). \tag{7}$$

Из неравенств (5), (6), (7) получаем

$$\sum_{i \in V} w(Z_i) \geqslant \sum_{i \in V} w(E_i^*). \tag{8}$$

Выражение, стоящее в левой стороне неравенства (8), задает стоимость всех ребер, вошедших в звезды Z_i и множество L, а в правой стороне — стоимость всех ребер, вошедших в оптимальное разбиение P^*.

Алгоритм назовем субоптимальным, если он для любого дерева T находит допустимое разбиение, удовлетворяющее условию $w(P) \geqslant \alpha w(P^*)$, где α — некоторая константа $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Далее величину α будем называть гарантированной оценкой субоптимального алгоритма.

Из утверждения 1 и 2 следует

Теорема. Алгоритм является субоптимальным с гарантированной оценкой $\alpha = 1/4$.

Следствие. Если T — цепь или в T не существует вершины i, для которой выполняется условие (2), то гарантированная оценка алгоритма α равна 1/2.

Оценим сложность алгоритма. Однократное выполнение п. 3 алгоритма требует $O(h_i \log h_i)$ времени. Поскольку $\sum_{i=1}^{n} h_i = n - 1$, то общее время работы алгоритма — $O(n \log n)$. Очевидно, что объем требуемой памяти — $O(n)$.

Если изменить п. 3 алгоритма так, как это сделано в работе [4], используя линейный алгоритм поиска медианы, то получим линейный алгоритм по времени и памяти.

Список литературы

1. Lukes J. A.//IBM J. Res. Developmeht. 1974. № 18. P. 217.
2. Schrader R.// Discr. Appl. Math. 1983. V. 6. № 3. P. 301.
3. Ковалев М. М., Котов В. М.// Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех. 1986. № 3. С. 44.
4. Kundu S., Misra J.// SIAM J. Comput. 1977. V. 6. № 1. P. 151.

Поступила в редакцию 19.02.85.

УДК 517.948

Т. Г. ПАВЛОВА

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ЯДРОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\left(1 + \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt = f(x), \quad \alpha < x < \beta, \tag{1}$$

в классе функций, интегрируемых вблизи точек α, β, ± 1, H-непрерывных на остальной части отрезка $[\alpha, \beta]$. В случае, когда $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, уравнение (1) решено в [1]. Здесь рассмотрим случай, когда $\alpha < -1$, $\beta > 1$. Под $\sqrt{1-x^2}$ при $|x| < 1$ понимается положительное значение, а при $|x| > 1$ — значение выделенной ниже ветви. Решать уравнение (1) будем методом аналитического продолжения. С этой целью вводим две кусочно-аналитические функции:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_\alpha^\beta \left(1 + \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-z^2}}\right)\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt,$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_\alpha^\beta \left(1 - \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-z^2}}\right)\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt. \tag{2}$$

Здесь под $\sqrt{1-z^2}$ понимается ветвь, однозначная и непрерывная на $\widehat{C}\setminus[-1, 1]$ и такая, что $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ \mathrm{Im}\, z>0}} \sqrt{1-z^2} = +1$ (последнее равносильно следующему условию: $\sqrt{1-z^2} \sim -iz$ при $z \to \infty$).

Используя формулы Сохоцкого [2] для нахождения предельных значений сверху (+) и снизу (—) функций (2) на множествах $l_1 =]\alpha, -1[\, \cup\,]1, \beta[$ и $l_2 =]-1, 1[$, получаем:

$$\Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \left(1 + \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt,\ x \in l_1,$$

$$\Phi_2^+(x) = \Phi_2^-(x), \quad x \in l_1. \tag{3}$$

$$\Phi_1^+(x) + \Phi_2^-(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \left(1 + \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt,\ x \in l_2,$$

$$\Phi_1^-(x) = \Phi_2^+(x),\ x \in l_2. \tag{4}$$

Заменяя в выражениях (3) и (4) интеграл через функцию $f(x)$ из (1), получаем векторно-матричную задачу Римана для нахождения функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$:

$$\begin{pmatrix}\Phi_1^+(x)\\ \Phi_2^+(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1^-(x)\\ \Phi_2^-(x)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-if(x)\\ 0\end{pmatrix},\ x \in l_1,$$

$$\begin{pmatrix}\Phi_1^+(x)\\ \Phi_2^+(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1^-(x)\\ \Phi_2^-(x)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-if(x)\\ 0\end{pmatrix},\ x \in l_2. \tag{5}$$

Решение задачи (5) должно отыскиваться в классе функций, исчезающих на бесконечности, допускающих интегрируемые особенности в точках $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \pm 1$, а также удовлетворяющих условию:

$$\lim_{z\to\infty} z\Phi_1(z) = \lim_{z\to\infty} z\Phi_2(z). \tag{6}$$

Так как матрица задачи (5) подстановочная [3], задача (5) может быть сведена к скалярной задаче Римана на двулистной римановой поверхности $\boldsymbol{R}$ с точками ветвления $z = \pm 1$. Поверхность $\boldsymbol{R}$ можно задать алгебраическим уравнением

$$z^2 + w^2 = 1. \tag{7}$$

Под $\sqrt{1-z^2}$ везде будем понимать выделенную выше непрерывную вне отрезка $[-1, 1]$ ветвь. Множества $D^+ := \{(z, w) \in \boldsymbol{R} \,|\, z \,\overline{\in}\, [-1, 1];\ w = \sqrt{1-z^2}\}$, $D^- := \{(z, w) \in \boldsymbol{R} \,|\, z \,\overline{\in}\, [-1, 1];\ w = -\sqrt{1-z^2}\}$ назовем соответственно «верхним» и «нижним» листами римановой поверхности $\boldsymbol{R}$. Листы D^+ и D^- имеют общий край, который представляет собой множество $\partial D = \{(x, \pm\sqrt{1-x^2}) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$, гомеоморфное единичной окружности.

Введем теперь новую неизвестную функцию $F(z, w)$, кусочно-аналитическую на $\boldsymbol{R}$:

$$F(z, w) = \begin{cases} \Phi_1(z), \text{ если } (z, w) \in D^+, \\ \Phi_2(z), \text{ если } (z, w) \in D^-. \end{cases}$$

Контуру римановой поверхности $\boldsymbol{R}$, соответствующему интервалу $]\alpha, \beta[$, припишем направление по возрастанию координаты x. Тогда краевые условия (5) могут быть записаны в терминах функции F так:

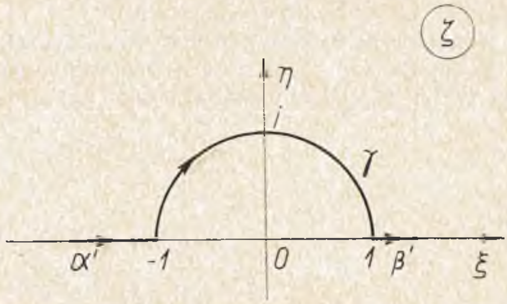
$$F^+(x, v) = -F^-(x, v) - if(x), \ x \in l_1, \ v = \sqrt{1-x^2}; \tag{8}$$

$$F^+(x, -v) = F^-(x, -v), \ x \in l_1, \ v = \sqrt{1-x^2}; \tag{9}$$

$$F^+(x, v) = -F^-(x, v) - if(x), \ x \in l_2, \ v = \sqrt{1-x^2}; \tag{10}$$

$$F^+(x, -v) = F^-(x, -v), \ x \in l_2, \ v = \sqrt{1-x^2}. \tag{11}$$

Здесь под $F^+(x, v)$ и $F^-(x, v)$ понимаются предельные значения слева и справа соответственно на линии разрыва функции $F(z, w)$.



Краевые условия (9) и (11) выражают аналитическую продолжимость функции $F(z, w)$ через соответствующие кривые. Таким образом, задача (8)—(11) приводится к виду:

$$F^+(x, v) = -F^-(x, v) - if(x), \ (x, v) \in L, \tag{12}$$

где $L := \{(x, \sqrt{1-x^2}) \mid x \in]\alpha, \beta[, \ x \neq \pm 1\}$.

Отобразим конформно риманову поверхность $\boldsymbol{R}$ (7) на сферу $\widehat{\boldsymbol{C}}$ переменного ζ по формулам:

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right); \ w = \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right). \tag{13}$$

При отображении (13) верхний лист переходит на область $|\zeta| > 1$, нижний — на круг $|\zeta| < 1$, край ∂D — на окружность $|\zeta| = 1$, бесконечно удаленная точка верхнего листа — в точку $\zeta = \infty$, бесконечно удаленная точка нижнего листа — в точку $\zeta = 0$. Вводя новую неизвестную функцию

$$\Psi(\zeta) = F\left(\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right); \ \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right),$$

из (12) получим задачу Римана для функции Ψ:

$$\Psi^+(\xi) = -\Psi^-(\xi) - if\left(\frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)\right), \ \xi \in \gamma, \tag{14}$$

где γ — соответственно ориентированный образ контура L при отображении (13) (см. рисунок, где $\alpha' = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$; $\beta' = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$). Решение задачи (14) следует искать в классе функций, исчезающих на бесконечности и в точке $\zeta = 0$, допускающих интегрируемые особенности в точках $\zeta = \alpha'$, $\zeta = \beta'$, имеющих простые полюсы в точках $\zeta = \pm 1$ и удовлетворяющих условию

$$\lim_{\zeta \to \infty} \zeta \Psi(\zeta) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{\Psi(\zeta)}{\zeta}. \tag{15}$$

Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче (14):

$$\Psi_0^+(\xi) = -\Psi_0^-(\xi), \ \xi \in \gamma. \tag{16}$$

Решение будем искать в виде [4]:

$$\Psi_0(\zeta) = \psi(\zeta)\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}\frac{d\eta}{\eta-\zeta}\right\}, \tag{17}$$

причем $\psi(\zeta)$ — произвольная рациональная на $\widehat{C}$ функция, кратная дивизору $J^{-1}D^{-1}E^{-1}$, где $J = (\alpha')(\beta')(+1)(-1)$, $D = (\infty)^{-1}(0)^{-1}$, $E = (\alpha')^{\left[-\frac{1}{2}\right]}(\beta')^{\left[\frac{1}{2}\right]} = (\alpha')^{-1}$, а число l линейно независимых решений задачи (16) равно: $l = \varkappa + m + n + 1 = 2$, где $\varkappa = -1$ — индекс задачи (16), $m = \operatorname{ord} J = 4$, $n = \operatorname{ord} D = -2$. Функция $\psi(\zeta)$ может быть выписана явно: $\psi(\zeta) = \dfrac{a\zeta^2 + b\zeta}{(\zeta-\beta')(\zeta^2-1)}$, где a — произвольная постоянная, а $b = \lambda a$. Из условия (15) найдем λ: $\lambda = i\sqrt{|\alpha'|\beta'}$.
Таким образом, общее решение задачи (16) имеет вид:

$$\Psi_0(\zeta) = a\,\frac{\zeta^2 + i\sqrt{|\alpha'|\beta'}\zeta}{(\zeta-\beta')(\zeta^2-1)}\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}\frac{d\eta}{\eta-\zeta}\right\}, \tag{18}$$

где a — произвольная постоянная.

Рассмотрим однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (1). Решение этого уравнения найдем по формулам Сохоцкого [2] через краевые значения функции $\Psi_0(\zeta)$:

$$\varphi_0(x) = \Psi_0^+(\xi) - \Psi_0^-(\xi), \tag{19}$$

где

$$\xi = \begin{cases} x - \sqrt{x^2-1}, & \alpha < x < -1; \\ x + i\sqrt{1-x^2}, & -1 < x < 1; \\ x + \sqrt{x^2-1}, & 1 < x < \beta. \end{cases} \tag{20}$$

Таким образом, общее решение соответствующего уравнению (1) однородного уравнения имеет вид:

$$\varphi_0(x) = 2i\psi(\xi)\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}\frac{d\eta}{\eta-\xi}\right\} =$$

$$= c\,\frac{\xi^2 + i\sqrt{|\alpha'|\beta'}\xi}{(\xi-\beta')(\xi^2-1)}\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}\frac{d\eta}{\eta-\xi}\right\}, \tag{21}$$

где c — произвольная постоянная, а переменные ξ и x связаны формулами (20).

Неоднородная задача (14) безусловно разрешима, а ее общее решение будет иметь вид: $\Psi(\zeta) = \Psi_0(\zeta) + \widetilde{\Psi}(\zeta)$, где

$$\widetilde{\Psi}(\zeta) = -\frac{\Psi_0(\zeta)}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{f\left(\frac{1}{2}\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)\right)}{\Psi_0^+(\eta)}\cdot\frac{d\eta}{\eta-\zeta}.$$

Частное решение уравнения (1) найдем по формулам, аналогичным (19): $\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\Psi}^+(\xi) - \widetilde{\Psi}^-(\xi)$, где зависимость между ξ и x задана формулами (20). Таким образом,

$$\widetilde{\varphi}(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{t=\alpha}^{t=\beta}\frac{\Psi_0^+(\xi)}{\Psi_0^+(\eta)}\cdot\frac{f(t)\,d\eta}{\eta-\xi},$$

где

$$x = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right),\quad t = \frac{1}{2}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right),\quad \xi,\ \eta \in \gamma.$$

Общее решение интегрального уравнения (1) имеет вид: $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \tilde{\varphi}(x)$, $\alpha < x < \beta$, и зависит от одной произвольной постоянной.

Список литературы

1. Моисеев Н. Г., Попов Г. Я.// Механика деформируемых тел и конструкций. Ереван. 1974.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
3. Зверович Э. И., Померанцева Л. И.// Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 1.
4. Зверович Э. И.// Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. № 1.

Поступила в редакцию 27.06.85.

УДК 517.948.32:517.544

О. ДЖУРАЕВ

ЭФФЕКТИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ЧЕТЫРЕХЛИСТНОМУ НАКРЫТИЮ СФЕРЫ, И ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть R — замкнутая риманова поверхность, реализованная в виде 4-листной поверхности наложения сферы $\hat{C}$ [1]. Предположим, что заданы точки ветвления $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ и образующие группы монодромии:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется построить поле алгебраических функций, соответствующее заданному накрытию сферы $\hat{C}$, точки ветвления и образующие группы монодромии которого совпадали бы с заданными.

Легко проверить, что подстановки σ_1, σ_2, σ_3 не коммутируют между собой, и $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 = e$, где e — единичная подстановка. Пусть $\bar{a} \in \hat{C}$ — отличная от a_1, a_2, a_3 точка. Соединяя точки a_1, a_2, a_3 с точкой $\bar{a}$ линиями, направленными к $\bar{a}$, и производя гомотопную деформацию, полученный контур превратим в контур, изображенный на рис. 1. Отрезок $[-1, 1]$ будем рассматривать как фиксированный разрез в плоскости и возьмем односвязную область $D = \hat{C} \setminus [-1, 1]$. Далее нетрудно показать, что группа монодромии, порожденная подстановками σ_1, σ_2, σ_3, действует транзитивно и поэтому риманова поверхность R связна. Так как цикленные типы подстановок таковы: (1, 1, 2), (4), (2, 2), то индекс ветвления поверхности R равен $\omega_z = 1 + 3 + 2 = 6$. По формуле Римана — Гур-

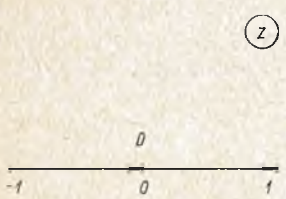


Рис. 1

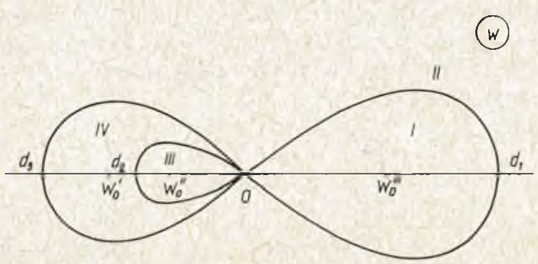


Рис. 2