



СУБМОДУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ В ЭКОНОМИКЕ И ЛОГИСТИКЕ

А. А. КОРОЛЁВА¹⁾¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

В современных экономических исследованиях выделяются разделы специальных хорошо решаемых задач, связанных с субмодулярными функциями. Приложения с субмодулярными функциями возникают в различных направлениях экономики – теории полезностей, теории игр, логистике. В статье анализируется роль субмодулярных функций в экономике, вводится широкий класс транспортных оптимизационных задач, ограничения и критерии в которых моделируются субмодулярными функциями, исследуются свойства этих задач, что позволяет построить эффективные алгоритмы оптимальных перевозок в транспортных сетях с супермодулярной целевой функцией затрат и субмодулярными ограничениями.

Ключевые слова: субмодулярные функции; дискретная выпуклость; сетевая транспортная задача.

SUBMODULAR FUNCTIONS IN ECONOMICS AND LOGISTICS

A. A. KOROLEVA^a^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

In modern economic research, sections of special well-solved problems related to submodular functions are distinguished. Applications with submodular functions arise in various areas of economics – utility theory, game theory and logistics. The article analyses the role of submodular functions in the economy, and then introduces a wide class of transport optimisation problems, the constraints and criteria in which are modeled by submodular functions, the properties of these problems are investigated, which allows us to build effective algorithms for constructing optimal transportation in transport networks with a supermodular objective function and submodular constraints.

Keywords: submodular functions; discrete convexity; network transport problem.

Понятие субмодулярности и его экономический смысл

Проанализируем данное понятие и его экономический смысл, сформулируем эквивалентные свойства и приведем типичные примеры субмодулярных функций.

Субмодулярность есть ослабленное свойство выпуклости непрерывных функций на функции, заданной на решетке. Наиболее распространенная в экономических приложениях решетка – булеан $(2N, \subseteq)$, т. е. семейство $2N$ всех подмножеств множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ относительно операции включения $\subseteq$.

Функция $f: 2^N \rightarrow R$ является субмодулярной, если для любых $X, Y \in 2^N$ выполнено неравенство

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y). \quad (1)$$

Образец цитирования:

Королёва АА. Субмодулярные функции в экономике и логистике. Журнал Белорусского государственного университета. Экономика. 2021;2:18–25.

For citation:

Koroleva AA. Submodular functions in economics and logistics. Journal of the Belarusian State University. Economics. 2021;2:18–25. Russian.

Автор:

Анна Анатольевна Королёва – кандидат физико-математических наук, доцент; декан экономического факультета.

Author:

Anna A. Koroleva, PhD (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of economics.
koroleva@bsu.by



Очевидно, что линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами субмодулярных функций есть функция субмодулярная. Функция является супермодулярной, если неравенство (1) выполняется с обратным знаком (ослабленный аналог свойства вогнутости), и модулярной, если (1) обращается в равенство (аналог свойства линейности).

i -Градиентом (аналог производной) функции f называется величина

$$\Delta_i f(X) = f(X \cup i) - f(X)$$

для любого $i \in N \setminus X$ (иногда $\Delta_i f(X)$ называют правым градиентом и рассматривают также левый градиент $\Delta_i^- f(X) = f(X \setminus i) - f(X)$).

Свойство монотонности i -градиентов (неубывания или невозрастания) эквивалентно определению субмодулярной (супермодулярной) функции. В экономике это свойство означает возрастающую (убывающую) полезность экономических объектов либо эффект масштаба.

Первыми подобные функции стали изучать советские кибернетики В. П. Черенин [1–3] и его ученик В. Р. Хачатуров [4] в задачах размещения производства. Термин «субмодулярные функции», по-видимому, впервые широко ввел в теорию оптимизации Д. Эдмондс [5], а их систематическое изучение было проведено авторами работ [6–11].

Еще одно эквивалентное определению свойство субмодулярной (супермодулярной) функции заключается в неположительности (неотрицательности) вторых градиентов:

$$\Delta_i(\Delta_j f(X)) = f(X \cup i \cup j) - f(X \cup i) - f(X \cup j) + f(X) \leq (\geq) 0.$$

Приведем из [7; 8] (см. также [11]) один хорошо известный факт – теорему об отделимости субмодулярной и супермодулярной функций: если r^+ – супермодулярная, r^- – субмодулярная функции на булеане 2^N и $r^+(I) \leq r^-(I)$ для всех $I \in 2^N$, то существует такая модулярная функция $c : 2^N \rightarrow R$, что

$$r^+(I) \leq c(I) \leq r^-(I)$$

для любого $I \in 2^N$.

Определение субмодулярности (супермодулярности) указывает на наличие синергетического эффекта от объединения экономических субъектов: субмодулярность говорит о негативных эффектах от объединения двух множеств объектов (систем) X и Y , а супермодулярность свидетельствует о возрастании величины синергетического эффекта от объединения систем X и Y . Модулярность означает отсутствие синергии при объединении систем. Иными словами, эффект синергии, выражаемый субмодулярностью (супермодулярностью), можно сформулировать следующим образом: целое (система) не менее (не более), чем сумма своих частей (подсистем).

Частными случаями супермодулярных (субмодулярных) функций являются такие часто применяемые в экономике функции с постоянной эластичностью замещения (CES), как функция Кобба – Дугласа (эластичность замещения равна единице), производственная функция Леонтьева (нулевая эластичность замещения), функция энтропии.

Супермодулярность широко используется в теории кооперативных и координационных игр при доказательстве существования ядра игры (см., например, [12]). Теорема Шейли утверждает, что супермодулярность характеристической функции кооперативной игры гарантирует существование непустого ядра игры. Позднее появился широко изучаемый новый класс игр – субмодулярные, или выпуклые, игры [13].

Супермодулярные функции полезности применяются при учете взаимодополнения товаров (благ) (см., например, [14]). Супермодулярность функции полезности означает, что прибавление товара i дает больший прирост полезности $f(X)$, когда он прибавляется к более широкому набору товаров X , чем Y . Аналогично, субмодулярность производственной функции свидетельствует о том, что затраты на производство дополнительного товара i убывают с ростом масштабов производства X .

Этот факт используется для доказательства существования равновесия. Так, в [15] показано, что если функции полезности супермодулярны, а функции издержек субмодулярны, то в экономике с инновационными товарами существует равновесие. Известна также задача максимизации среднего благосостояния, которая описывается субмодулярной функцией.

Примеры субмодулярных функций (некоторые из них обобщают приведенные в [11] примеры):

1) функция $f(I) = \sum_{i \in I} c_i$ является модулярной для любого $c \in R^n$, т. е. она одновременно субмодулярна и супермодулярна на 2^N ;

2) функция $f(I) = \max\{c_i : i \in I\}$ субмодулярна, а функция $f(I) = \min\{c_i : i \in I\}$ супермодулярна для любого $c \in R^n$;



3) функция $f(I) = \sum_{j=1}^n \max \{c_{ij} : i \in I\}$ является субмодулярной для всех $c \in R^{m,n}$ как сумма субмодулярных функций из примера 2;

4) функция $f(I) = \sum_{i=1}^{|I|} c_i$ субмодулярна для вектора $c \in R^n$ с элементами $c_1 \geq \dots \geq c_n \geq 0$;

5) если $g(\alpha)$ – выпуклая функция на R , то $f(I) = g(|I|)$ – субмодулярная функция (легко доказывается монотонность градиента);

6) если $G = (V, E)$ – неориентированный граф и каждому ребру j приписан положительный вес c_j (например, пропускная способность), то функция $f(I) = \sum_{j \in I} c_j$ является субмодулярной для всех $I \subseteq V$

при суммировании по всем ребрам j с одним концом в I и другими концами в $V \setminus I$ (функция разреза графа) (это же верно для ориентированных графов);

7) если $G = (V, E)$ – неориентированный граф, то функция $f(I)$, определенная на 2^E правилом, согласно которому $f(I)$ равно числу вершин, инцидентных по крайней мере одному ребру из I , субмодулярна;

8) если f_1 – субмодулярная функция, а $f_2 : R_+ \rightarrow R_+$ – неубывающая выпуклая функция, $f_2(0) = 0$, то суперпозиция $f(I) = f_2(f_1(I))$ субмодулярна (легко доказывается монотонность градиента);

9) функция $f(I) = \min \left\{ B, \sum_{i \in I} c_i \right\}$ является субмодулярной для каждого $c_i \geq 0$ и $B \geq 0$ и называется бюджетно-аддитивной;

10) функция покрытия $f(I) = \left| \bigcup_{i \in I} E_i \right|$ для системы множеств $\{E_1, \dots, E_n\}$ является субмодулярной.

Хорошо известно, что проблема минимизации субмодулярной функции полиномиально разрешима, а проблема ее максимизации NP трудна (см., например, [7; 8]).

Свойство субмодулярных функций (без термина «субмодулярность») использовалось В. П. Черениным еще начиная с 1948 г. в работах [1–3] и впоследствии стало основой предложенного им метода последовательных расчетов, который предполагает направленный перебор с отсечением неперспективных направлений перебора для максимизации субмодулярной (минимизации супермодулярной) функции. Метод последовательных расчетов широко применялся в Вычислительном центре АН СССР, затем группой В. Р. Хачатурова (см., например, [4; 16; 17]) для решения задач составления поездов, размещения производств и транспортировки, особенно в связи с оптимизацией нефтепереработки, а позднее самых разных задач регионального планирования и инвестирования. В 1978 г. Д. М. Топкис [6] изучил проблему минимизации субмодулярной функции на произвольной решетке (а не обязательно булеане) в связи с задачами компаративной статистики (свои исследования Д. М. Топкис обобщил в монографии [9]).

Субмодулярные задачи транспортной логистики

Субмодулярность – свойство, присущее большинству задач логистики, в частности транспортной. Приведем простейшие задачи транспортной логистики, сводимые к задаче минимизации субмодулярной или супермодулярной функции.

Пример 1 (задача размещения складов (производств) без ограничения на мощность [4]). Пусть $b_1, \dots, b_m$ – потребность в товаре в пунктах $1, \dots, i, \dots, m$, а $N = \{1, 2, \dots, j, \dots, n\}$ – возможные места размещения складов (производств). Необходимо выбрать множество $X | X| \leq |Y|$ мест расположения так, чтобы достигался минимум функции

$$f(X) = \sum_{j \in X} d_j + \min \sum_{i=1}^m \sum_{j \in X} x_{ij} c_{ij}$$

при условиях $\sum x_{ij} = b_i$ для любого $i \in X, i = 1, \dots, m, x_{ij} \geq 0$ для любого $j \in X, i = 1, \dots, m$, где c_{ij} – транспортные затраты доставки из пункта i в пункт j , а d_j – постоянные затраты со строительством склада (завода) в пункте j .

Легко доказывается монотонность i -градиентов, а следовательно, супермодулярность функции $f(X)$.

Пример 2 (задача о k -медиане графа). В графе $G = (V, E)$ со взвешенными ребрами необходимо найти k мест X расположения складов так, чтобы расстояние до самого далекого склада от любой вершины было наименьшим. В этой задаче целевая функция

$$f(X) = \sum_{i \in V} \max \{c_{ij} : j \in X\}$$

для любого $X \subseteq Y$ будет субмодулярной.

Пример 3 (максимизация прибыли транспортной компании). Любая транспортная компания решает задачу максимизации своей прибыли $F(X)$, выбирая оптимальное множество X потребителей некоторого товара, который она доставляет от поставщиков, из заданного множества $1, 2, \dots, m$. Итак, имеем задачу

$$\begin{aligned} F(X) &= \sum_{j \in J} b_j - \min \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}, \\ \sum_{j \in J} x_{ij} &\leq a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i \in r} x_{ij} &= b_j, \quad j \in J. \end{aligned}$$

Требуется

$$\begin{aligned} \max F(X), \\ X \subseteq \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Переходя к двойственной задаче, можно доказать, что $F(X)$ – субмодулярная функция (схожий результат получен в [18]).

Другие примеры транспортных задач, сводимых к минимизации субмодулярных функций, можно найти в [11; 16; 18]. Заметим, что в 1980-х гг. многими авторами было доказано, что минимизация субмодулярной функции возможна методом эллипсоидов в полиномиальное время (см., например, [7; 8; 10]).

Субмодулярные многогранники (полиматроиды)

Еще одна причина для изучения субмодулярных функций – это свойства допустимых множеств, заданных такими функциями и называемых полиматроидами $P(r)$:

$$\sum_{i \in I} x_i \leq r(I), \quad x_i \geq 0, \quad i \in N,$$

для любого $I \subseteq N$, где $r(I)$ – субмодулярная функция. Полиматроиды интересны тем, что в задаче максимизации линейной функции $\sum_{i \in N} c_i x_i$ на полиматроиде $P(r)$ (а это разновидность транспортной

задачи [17; 19]) простой градиентный (*greedy*) алгоритм находит оптимальное решение (факт установлен Д. Эдмондсом еще в 1970 г. [5]).

В цикле работ М. М. Ковалёва и Н. Н. Писарука в 1985 г. субмодулярные функции применялись для моделирования транспортных задач оптимизации энергосетей (результаты были обобщены в монографии [11]).

Субмодулярные потоки в транспортных сетях

Стандартная транспортная задача в матричной форме для практических применений слишком проста и не учитывает:

- 1) более сложный сетевой характер транспортных задач и пропускные способности сети;
- 2) различные дополнительные ограничения по взаимозаменяемости поставщиков и взаимодополняемости потребителей;
- 3) нелинейный, как правило, вогнутый характер функции стоимости перевозок.

Используя субмодулярные функции ограничений и супермодулярную функцию затрат, смоделируем более сложные транспортные ситуации, максимально приближенные к практической реальности. Отметим, что первые работы с подобными обобщениями появились еще в 1980-х гг. (их обзор см. в [11]), однако носили математический характер и до приложений в транспортной логистике не были доведены.

Пусть $G = (V, E)$ – сеть со множеством источников V^+ (здесь находятся грузы) и множеством стоков V^- (здесь имеются потребности в этих грузах), $V^+ \subseteq V$, $V^- \subseteq V$, $V^+ \cap V^- = \emptyset$. Пусть d_e^- и d_e^+ – векторы нижних и верхних пропускных способностей всех дуг $e \in E$, разумеется, $d_e^- \leq d_e^+$. Обозначим через E_i^+ и E_i^- множество дуг, входящих в вершину $i \in V$ и выходящих из нее соответственно. Целочисленный вектор $x : E \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть субмодулярным потоком, если он удовлетворяет ограничениям:



- по пропускной способности дуг

$$d_e^- \leq x \leq d_e^+; \quad (2)$$

- по балансу притока и оттока для каждой вершины промежуточной сети

$$\sum_{e \in E_i^+} x_e = \sum_{e \in E_i^-} x_e$$

для любого $i \in V \setminus (V^+ \cup V^-)$;

- по балансу вывоза грузов с учетом взаимозаменяемости для источников

$$r_1^-(I) \leq u_i(x) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{e \in E_i^-} x_e - \sum_{e \in E_i^+} x_e \right) \leq r_1^+(I) \quad (3)$$

для любой вершины $i \in V^+$ и любого $I \subseteq V^+$;

- по балансу завоза грузов с учетом взаимодополняемости для стоков

$$r_2^-(I) \leq v_i(x) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{e \in E_i^+} x_e - \sum_{e \in E_i^-} x_e \right) \leq r_2^+(I) \quad (4)$$

для любой вершины $i \in V^-$ и любого $I \subseteq V^-$. Здесь векторы $\{u_i(x) : i \in V^+\}$ и $\{v_i(x) : i \in V^-\}$ носят вспомогательный характер и отображают транспортные потоки из источников $i \in V^+$ и в стоки $i \in V^-$ соответственно. Ограничения (3) и (4), отсутствующие в стандартной потоковой задаче, показывают коррелированность и взаимозаменяемость предложения и спроса соответственно. Груз поставщиков имеется на нескольких взаимозаменяемых складах I в рамках двусторонних ограничений – нижних $r_s^-(I)$ и верхних $r_s^+(I)$. Это же относится и к складам потребителей грузов. Поэтому перевозчики обладают большей свободой выбора, где взять груз и куда отвезти. Понятно, что, выбирая конкретные функции $r_s^-(I)$, $r_s^+(I)$, получаем и стандартную потоковую задачу, и различные другие известные случаи задач о независимых, кроссирующих, полиматроидных, а также координатно-выпуклых потоках (их обзор см. в [11]).

Смысл ограничений (3) и (4) состоит в возможности взаимозаменять в подмножествах I поставщиков и потребителей, но с учетом их нижних r_1^-, r_2^- или верхних r_1^+, r_2^+ ограничений по всему подмножеству I , где $r_1^+(I)$ и $r_2^+(I)$ – субмодулярные, а $r_1^-(I)$ и $r_2^-(I)$ – супермодулярные функции, связанные соотношением

$$\Delta_i^+ r_1^{+(-)}(I) \geq \Delta_i^+ r_2^{+(-)}(\bar{I} \setminus i) \quad (5)$$

для любого $I \subseteq V^+ \setminus i$, $I \subseteq V^+ \setminus (V^- \setminus i)$ и любого $i \in V^+ \setminus (V^-)$.

Условие (5), как показано в [11], гарантирует, что пересечение $P(r_1^-, r_1^+)$ или $P(r_2^-, r_2^+)$ двух полиматроидов (нижнего $P(r_1^-)$ и верхнего $P(r_1^+)$ соответственно) обладает свойствами обычного полиматроида.

Субмодулярный поток будем называть оптимальным, если он доставляет минимум целевой функции затрат:

$$\sum_{e \in E} f_e(x_e) \Rightarrow \min,$$

где $f_e(x_e)$ – вогнутая функция стоимости транспортировки по дуге e (в частности, она может быть линейной: $f_e(x_e) = c_e x_e$). Легко доказывается, что на решетке $(Z^n, \leq)$ целочисленных потоков целевая функция является супермодулярной.

Прежде чем переходить к алгоритму решения сформулированной задачи о субмодулярном потоке в транспортной сети минимальной стоимости и заданной мощности v (или максимальной мощности), рассмотрим вспомогательную конструкцию, обобщающую понятие аугментального графа, и с ее помощью сформулируем критерий оптимальности.

Аугментальный граф. Пусть x есть субмодулярный поток мощности k . Аналогично тому, как это делают в теории потоков, определим аугментальный граф G_x со множеством вершин V и множеством дуг $\bar{E}$ следующих четырех типов:

$$F_1 = \{e \in E : x_e < d_e^+\},$$

$$F_2 = \{e : \bar{e} \in E, x_{\bar{e}} > d_{\bar{e}}^-\},$$

$$B_1 = \text{fes}^{+,+}(u^x, P(r_1^-, r_1^+)),$$

$$B_2 = \text{fes}^{+,-}(v^x, P(r_2^-, r_2^+)),$$

где $\bar{e}$ – дуга, обратная дуге e . Множества допустимых направлений возможного улучшения целевой функции для любого допустимого множества D (а это $P(r_1^-, r_1^+)$ или $P(r_2^-, r_2^+)$) определяются правилами

$$\text{fes}^{+, -}(x, D) = \{(i, j) : x + e_i - e_j \in D\},$$

$$\text{fes}^{+(-)}(x, D) = \{i : x + (-) e_i \in D\},$$

где $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ – единичный вектор.

Аугментальный граф используется для поиска допустимых направлений его улучшения в точке x аналогично тому, как граф увеличивающих путей используется в простейшей потоковой задаче. Дугам из $\tilde{E}$ поставим в соответствие пропускные способности по правилу

$$d_e = d_e^+ - x_e, e \in F_1; d_{\bar{e}} = x_{\bar{e}}, e \in F_2; d_{ij} = \lambda_1(u, j, i), (i, j) \in B_1; d_{ij} = \lambda_2(v, j, i), (i, j) \in B_2,$$

где функция $\lambda_s(z, i, j)$ определена для $P(r_s^-, r_s^+)$ правилом

$$\lambda_s(z, i, j) = \max \left\{ \varphi : z + \varphi(e_i - e_j) \in P(r_s^-, r_s^+) \right\}.$$

Здесь $\lambda(z, i, j)$ – длина максимально возможного шага по бикоординатному улучшению потока z .

Элементарной циркуляцией мощности ε вдоль цикла C в аугментальном графе G_x назовем вектор φ , определенный правилом

$$\varphi_e = \begin{cases} \varepsilon, & e \in C, \\ 0, & e \notin C. \end{cases}$$

Здесь длина шага ε по улучшению потока есть минимальное из возможных значений.

Для потока x в графе G_x определим новый поток (вектор) $x \oplus \varphi$ по правилу $(x \oplus \varphi)_e = x_e + \varphi_e - \varphi_{\bar{e}}$ для всех $e \in E$.

Определим длины дуг аугментального графа G_x правилом

$$\begin{cases} \Delta_e^+ f(x), & e \in F_1, \\ \Delta_e^- f(x), & e \in F_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $\Delta_e^- f(x)$ – левый e -градиент.

Критерии оптимальности. Субмодулярный поток x является потоком минимальной стоимости среди субмодулярных потоков той же мощности тогда и только тогда, когда в аугментальном графе G_x нет циклов отрицательной длины.

Обосновать критерий можно аналогично общей теории потоков, но с массой усложняющих деталей из-за полиматроидных ограничений.

Алгоритм поиска оптимального субмодулярного потока. Данный алгоритм обобщает на субмодулярные потоки и вогнутую функцию стоимости известные алгоритмы отрицательных циклов построения транспортных потоков минимальной стоимости в стандартной потоковой задаче. Похожие обобщения на частные случаи сформулированной задачи о субмодулярных потоках были популярны в 1990-х гг. (обзор тех результатов см. в [11]).

Шаг 1 (построение начального g -потока x). Полагаем, что известен поток x в сети G , т. е. вектор из Z_+^E , который удовлетворяет условиям баланса (3) в вершинах $i \in V \setminus (V_1 \cup V_2)$ и ограничениям на пропускные способности (2). Алгоритмы построения потока x в теории потоков хорошо известны. Вопрос о построении точек $u^x \in P(r_1^-, r_1^-)$, $v^x \in P(r_2^-, r_2^-)$, принадлежащих обобщенным полиматроидам (3), (4), вытекает из теоремы об отделимости [7; 8].

Дополним сеть G новой вершиной s и множеством дуг следующих четырех типов:

$$E^{s,1} = \{(s, i) : i \in V_1, u_i^{x^1} > u_i^1\},$$

$$E^{1,s} = \{(i, s) : i \in V_1, u_i^{x^1} > u_i^1\},$$

$$E^{s,2} = \{(s, i) : i \in V_2, u_i^{x^2} > u_i^2\},$$

$$E^{2,s} = \{(i, s) : i \in V_2, u_i^{x^2} > u_i^2\}.$$



Шаг 2. Строим аугментальный граф G_x . В графе G_x назначаем длины дуг по правилу $l_e = \Delta_i d_e^+ f(x)$, если $e \in F_1$, $l_e = \Delta_i d_e^- f(x)$, если $e \in F_2$, и $l_e = 0$ в остальных случаях. В графе G_x отыскиваем цикл отрицательной длины с наименьшим числом дуг. Если такой цикл существует, то переходим к шагу 3, а если нет, то x – оптимальный субмодулярный поток.

Шаг 3. Вычисляем $\varepsilon^0 = \arg \max \{f(x \oplus \varphi^c(\varepsilon)) : \varepsilon \in Z_+, \varepsilon \leq \varepsilon^1\}$, где $\varepsilon^1 = \min\{d_e : e \in C\}$. Здесь $\varphi^c(\varepsilon)$ – элементарная циркуляция мощности ε вдоль цикла C графа G_x . Строим циркуляцию φ^x мощности ε^0 вдоль цикла C . Полагаем x равным $x \oplus \varphi^x$ и возвращаемся к шагу 2.

Обоснование алгоритма вытекает из критерия оптимальности.

Выводы

1. Задача о субмодулярном потоке моделирует практически любые задачи транспортной логистики, так как субмодулярные и супермодулярные функции, как показано в первой части работы, соответствуют экономическим категориям взаимодополняемости и взаимозаменяемости, а вогнутые функции (убывающие затраты с ростом масштаба перевозок) отвечают реальной экономике.

2. Стандартная транспортная задача является частным случаем изложенной, так как линейная функция – это частный случай вогнутой, а стандартные транспортные ограничения есть пересечение двух простых (древовидных) полиматроидов.

3. В статье опущены алгоритмические детали, потому что в настоящее время создается инструментальный программный комплекс, который будет предложен логистическим компаниям на коммерческих условиях.

Библиографические ссылки

1. Черенин ВП, Петров АП. Усовершенствование метода составления плана формирования поездов. *Железнодорожный транспорт*. 1948;3:60–71.
2. Черенин ВП. Механизация расчетов по составлению плана формирования поездов. *Техника железных дорог*. 1954;1:79–96.
3. Черенин ВП. *Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов*. Новосибирск: [б. и.]; 1962. 21 с. (Материалы к Конференции по опыту и перспективам применения математических методов и электронных вычислительных машин в планировании).
4. Хачатуров ВР. *Некоторые вопросы и приложения метода последовательных расчетов к решению задач размещения производства* [диссертация]. Москва: Центральный экономико-математический институт Академии наук СССР; 1968. 164 с.
5. Edmonds J. Submodular functions, matroids and certain polyhedra. In: Guy R, Hanani H, Sauer N, Schönheim J, editors. *Combinatorial structures and their applications. Proceedings of the Calgary International conference; 1969 June 2–14; Calgary, Alberta, Canada*. New York: Gordon and Breach; 1970. p. 69–87.
6. Topkis DM. Minimizing a submodular functions on a lattice. *Operations Research*. 1978;26(2):305–321. DOI: 10.1287/opre.26.2.305.
7. Fujishige S. Submodular systems and related topics. In: Korte B, Ritter K, editors. *Mathematical Programming at Oberwolfach II*. Berlin: Springer-Verlag; 1984. p. 113–131 (Mathematical programming studies; volume 22).
8. Fujishige S. *Submodular functions and optimization*. 2nd edition. Amsterdam: Elsevier; 2005. 410 p. (Annals of discrete mathematics; volume 58).
9. Topkis DM. *Supermodularity and complementarity*. Princeton: Princeton University Press; 1998. 272 p. (Frontiers of economic research).
10. Lovasz L. Submodular functions and convexity. In: Bachem A, Grötschel M, Korte B, editors. *Mathematical programming. The state of the art. Bonn, 1982*. Berlin: Springer-Verlag; 1983. p. 235–257.
11. Ковалёв ММ. *Матроиды в дискретной оптимизации*. Минск: Университетское; 1987. 220 с.
12. Russell C, Andrew J. Coordinating coordination failures in Keynesian models. *The Quarterly Journal of Economics*. 1988; 103(3):441–463. DOI: 10.2307/1885539.
13. Данилов ВИ. *Лекции по теории игр*. Москва: Российская экономическая школа; 2002. 140 с.
14. Chambers CP, Echenique F. Supermodularity and preferences. *Journal of Economic Theory*. 2009;144(3):1004–1014. DOI: 10.1016/j.jet.2008.06.004.
15. Данилов ВИ, Кошевой ГА. Экономика с инновационными товарами. *Экономика и математические методы*. 2009; 45(1):44–55.
16. Хачатуров ВР. *Алгоритмы максимизации супермодулярных функций и их применение в задачах оптимального распределения инвестиций в регионах* [диссертация]. Москва: Центральный экономико-математический институт РАН; 2002. 95 с.
17. Хачатуров ВР. Основные свойства решеток кубов, алгоритмы их построения и возможности применения в дискретной оптимизации. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2015;55(1):121–134. DOI: 10.7868/S004446691501010X.
18. Монтлевич ВМ. О субмодулярности функции прибыли в одной из задач планирования перевозок. *Вестник Самарского государственного университета. Естественно-научная серия*. 2014;10:48–54.
19. Гасников АВ, редактор. *Введение в математическое моделирование транспортных потоков*. 2-е издание. Москва: Издательство Московского центра непрерывного математического образования; 2013. 426 с.

References

1. Cherenin VP, Petrov AP. [Improvement of the method of drawing up a plan for the formation of trains]. *Zheleznodorozhnyi transport*. 1948;3:60–71. Russian.
2. Cherenin VP. [Mechanisation calculations to plan the formation of trains]. *Tekhnika zheleznykh dorog*. 1954;1:79–96. Russian.
3. Cherenin VP. *Reshenie nekotorykh kombinatornykh zadach optimal'nogo planirovaniya metodom posledovatel'nykh raschetov* [Solving some combinatorial problems of optimal planning by the method of successive calculations]. Novosibirsk: [s. n.]; 1962. 21 p. (Materialy k Konferentsii po opytu i perspektivam primeneniya matematicheskikh metodov i elektronnykh vychislitel'nykh mashin v planirovanii). Russian.
4. Khachaturov VR. *Nekotorye voprosy i prilozheniya metoda posledovatel'nykh raschetov k resheniyu zadach razmeshcheniya proizvodstva* [Some questions and applications of the method of sequential calculations to solving problems of production placement] [dissertation]. Moscow: Tsentral'nyi ekonomiko-matematicheskii institut Akademii nauk SSSR; 1968. 164 p. Russian.
5. Edmonds J. Submodular functions, matroids and certain polyhedra. In: Guy R, Hanani H, Sauer N, Schönheim J, editors. *Combinatorial structures and their applications. Proceedings of the Calgary International conference; 1969 June 2–14; Calgary, Alberta, Canada*. New York: Gordon and Breach; 1970. p. 69–87.
6. Topkis DM. Minimizing a submodular functions on a lattice. *Operations Research*. 1978;26(2):305–321. DOI: 10.1287/opre.26.2.305.
7. Fujishige S. Submodular systems and related topics. In: Korte B, Ritter K, editors. *Mathematical Programming at Oberwolfach II*. Berlin: Springer-Verlag; 1984. p. 113–131 (Mathematical programming studies; volume 22).
8. Fujishige S. *Submodular functions and optimization*. 2nd edition. Amsterdam: Elsevier; 2005. 410 p. (Annals of discrete mathematics; volume 58).
9. Topkis DM. *Supermodularity and complementarity*. Princeton: Princeton University Press; 1998. 272 p. (Frontiers of economic research).
10. Lovasz L. Submodular functions and convexity. In: Bachem A, Grötschel M, Korte B, editors. *Mathematical programming. The state of the art. Bonn, 1982*. Berlin: Springer-Verlag; 1983. p. 235–257.
11. Kovalev MM. *Matroidy v diskretnoi optimizatsii* [Matroids in discrete optimisation]. Minsk: Universitetskoe; 1987. 220 p. Russian.
12. Russell C, Andrew J. Coordinating coordination failures in Keynesian models. *The Quarterly Journal of Economics*. 1988; 103(3):441–463. DOI: 10.2307/1885539.
13. Danilov VI. *Lektsii po teorii igr* [Lectures on the theory of games]. Moscow: New Economic School; 2002. 140 p. Russian.
14. Chambers CP, Echenique F. Supermodularity and preferences. *Journal of Economic Theory*. 2009;144(3):1004–1014. DOI: 10.1016/j.jet.2008.06.004.
15. Danilov VI, Koshevoi GA. [Economics with innovative goods]. *Ekonomika i matematicheskie metody*. 2009;45(1):44–55. Russian.
16. Khachaturov VR. *Algoritmy maksimizatsii supermodulyarnykh funktsii i ikh primeneniye v zadachakh optimal'nogo raspredeleniya investitsii v regionakh* [Algorithms for maximising supermodular functions and their application in problems of optimal investment distribution in regions] [dissertation]. Moscow: Tsentral'nyi ekonomiko-matematicheskii institut RAN; 2002. 95 p. Russian.
17. Khachaturov VR. [Basic properties of cube lattices, algorithms for their construction and application possibilities in discrete optimisation]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*. 2015;55(1):121–134. Russian. DOI: 10.7868/S004446691501010X.
18. Montlevich VM. On the submodularity of the profit function in a problem of transport planning. *Bulletin of Samara State University. Natural Science Series*. 2014;10:48–54. Russian.
19. Gasnikov AV, editor. *Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov* [Introduction to mathematical modelling of transport flows]. 2nd edition. Moscow: Publishing House of the Moscow Center for Continuous Mathematical Education; 2013. 426 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 09.09.2021.
Received by editorial board 09.09.2021.