

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет

М. А. Журавков, А. В. Чигарев

Инверсионная неустойчивость, бифуркации, катастрофы
в геотехнике и геомеханике и что об этом знали древние египтяне

Минск
2022

УДК 531/534+624.04

Ж 91

Решение о депонировании вынес:
Совет механико-математического факультета
17 февраля 2022 г., протокол № 7

Рецензенты:

Заведующий кафедрой био- и наномеханики БГУ, доктор физ.-мат. наук, профессор Г. И. Михасев;

Заведующий кафедрой теоретической механики и теории машин и механизмов БГАТУ, доктор технических наук, профессор А. Н. Орда.

Авторы:

Журавков Михаил Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики ММФ БГУ; Чигарев Анатолий Власович, доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры био- и наномеханики БГУ.

Журавков, М. А. Инверсионная неустойчивость, бифуркации, катастрофы в геотехнике и геомеханике и что об этом знали древние египтяне / М. А. Журавков, А. В. Чигарев ; БГУ, Механико-математический фак. – Минск : БГУ, 2022. – 50 с. : ил. – Библиогр.: с. 46–49.

В работе рассматриваются вопросы, связанные с применением методов качественной теории устойчивости и катастроф к широкому кругу явлений и процессов, имеющих место в геомеханике (механике горных пород и массивов, механике подземных сооружений) и геотехнике. С точки зрения теории катастроф и теории устойчивости рассмотрены вопросы предельного равновесия наземных и подземных геотехнических сооружений. Рассматривается проблема инверсии плотности материи. На конкретных примерах из аналитической механики, механики подземных и наземных геотехнических сооружений показана связь проблемы инверсии плотности материи с задачами теории катастроф, теории устойчивости и предельных состояний. Приводятся исторические факты и материалы, а также современные представления и взгляды о катастрофических явлениях в наземных и подземных сооружениях, вследствие возникновения инверсионной неустойчивости. Показано, как проблемы, которые возникали у древних египтян при строительстве таких сложных сооружений, как гробницы фараонов, продолжают оставаться актуальными и в настоящее время при строительстве подземных и наземных масштабных сооружений. Рассмотрены этапы развития методы и подходы к моделированию от эмпирических знаний к эвристическому моделированию, а затем к математическому и численному моделированию.

Работа представляет интерес как специалистам в области теоретической и прикладной механики, математического моделирования, так и может быть рекомендована широкому кругу читателей, знакомых с базовыми понятиями в области теоретической и прикладной механики, строительной механики.

Введение

Катастрофическим будем считать такое развитие механического события (явления, процесса), когда имеет место резкое качественное (изменение системы разрешающих уравнений или отдельных уравнений, описывающих событие) или количественное изменение (скачок) управляющих параметров.

С понятием катастрофическое событие в механике тесно связано и понятие устойчивости. При этом *устойчивость* в механике рассматривается с нескольких позиций: устойчивость модели и устойчивость механического состояния (положения).

Устойчивость модели базируется на таком исходном положении, что все параметры, входящие в формулировку любой прикладной задачи, могут быть заданы лишь приближенно. Поэтому, во-первых, при выборе метода решения любой прикладной задачи необходимым требованием к нему должна быть его устойчивость при изменении параметров задачи (хотя бы достаточно малом). Под термином “параметры” подразумевается все, что задается при постановке задачи (скалярные, векторные величины, элементы функциональных пространств). И, во-вторых, важным является устойчивость самой математической модели, где под устойчивой понимается такая модель, малые изменения параметров которой не вызывают существенных качественных изменений ее свойств. Устойчивость модели представляет собой одно из важнейших необходимых условий адекватности математической модели реальному механическому процессу. С помощью привлечения *методов теории робастности* – малой чувствительности к изменению исходных предпосылок, проводится изучение возможной неустойчивости методов и моделей решения прикладных задач.

В механике, наряду с задачей о нахождении ее единственного напряженно-деформированного состояния при выполнении определенных условий (система заданных сил, граничные и начальные условия), ставится также задача о *нахождении условий нарушения единственности положения равновесия*. Эта задача имеет исключительно важное значение в приложениях, а в ряде случаев является и определяющей по сравнению с задачей определения единственного положения равновесия.

Пусть на тело действует внешняя нагрузка P , которая зависит только от одного изменяющегося параметра. В некоторых пределах изменения вышеуказанного параметра решение задачи будет оставаться единственным (напряжения и перемещения в теле будут определяться единственным

образом). При достижении параметром критического значения может появиться еще одна (или более) форма равновесия, которая не учитывается ранее полученным решением. Критическому значению параметра внешней нагрузки P^* будут соответствовать два (или более) мало отличающихся друг от друга положения равновесия тела. Таким образом, получаем аналитическую запись условия устойчивости равновесия тела в виде $P^* < P$. Значение P^* будет зависеть от формы и размеров тела, типа закрепления, физико-механических свойств и характера нагрузки.

Замечание. Если внешняя нагрузка зависит от большего числа параметров, можно провести аналогичного рода рассуждения.

Процедура исследования вопросов потери устойчивости равновесия в общем случае сводится к изучению решения задачи, представленного в виде суммы двух составляющих: основного (невозмущенного) и дополнительного (возмущенного) состояний. Конечная цель – отыскание таких нагрузок, при которых возможно существование компонент возмущенного состояния. Существуют различные методы отыскания этих нагрузок. Наиболее эффективными являются те, в которых используются общие соотношения механики. Вопросы устойчивости равновесия требуют представления о деформациях как о конечных величинах.

Устойчивость состояния механических объектов в формате теории катастроф имеет удобный и геометрически наглядный способ не только качественного анализа и синтеза проблемы. В теории катастроф выделено конечное множество структур (порядка семи), являющиеся элементарными, и разработаны методы синтеза из них сложных типов катастроф, которые, в принципе, позволяют описать состояние различных объектов, масштаб которых меняется от элементарных частиц до масштабов Вселенной.

Объекты (системы) математически описываются переменными состояниями (параметры порядка), внешние воздействия выделяются в отдельное множество параметров управления, изменение которых влияет на изменение состояния параметров порядка. Отдельное множество параметров образует множество для описания дефектов и несовершенств системы.

Такая структуризация задачи позволяет в пространстве обобщенных координат, в качестве которых берутся переменные состояния (порядка), управляющие параметры и параметры несовершенств, изобразить поверхность равновесия. Рельеф поверхности равновесия в трехмерном пространстве дает наглядное представление о проблеме.

В рамках системного анализа теория катастроф предоставляет также ответ на вопрос о чувствительности системы к управлению, к структурным параметрам, несовершенствам.

1. О применении теории катастроф в геотехнике и геомеханике

Предметом теории катастроф является изучение зависимости качественной природы решений уравнений от значений параметров, присутствующих в заданных уравнениях [1].

Рассмотрим решение $\psi_1(t, x; c_\alpha), \psi_2(t, x; c_\alpha), \dots$ системы n уравнений, определенной в пространстве \mathfrak{R}^N с координатами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$F_i \left(\psi_j, c_\alpha; t, \frac{d\psi_j}{dt}, \frac{d^2\psi_j}{dt^2}, \dots; x_l; \frac{\partial\psi_j}{\partial x_l}, \frac{\partial^2\psi_j}{\partial x_l \partial x_m}, \dots; \int dx_{l, \dots} \right) = 0, \quad (1.1)$$

где $1 \leq i \leq n, 1 \leq l, m \leq N, 1 \leq \alpha \leq k$, причем переменные x_l и t можно считать соответственно пространственными и временными координатами.

Решения ψ_j описывают состояние некоторой системы, поэтому будем называть их переменными состояниями. Предполагается, что уравнения $F_i = 0$ зависят от k параметров c_α , т.е. последние могут качественно влиять на свойства решений ψ_j , поэтому их называют управляющими параметрами.

Проблема исследования решений системы уравнений (1.1), даже если речь идет лишь о том, как зависят эти решения от управляющих параметров c_α , является исключительно сложной. Однако ее можно упростить, сделав ряд некоторых предположений.

Например, можно ввести следующие упрощающие предположения: система не содержит интегралов, пространственных производных любого порядка, не зависит от пространственных производных, содержит производные по времени не выше первого порядка и эти производные входят в функцию F_i специальным (каноническим) образом:

$$F_i = \frac{d\psi_i}{dt} - f_i(\psi_j, c_\alpha, t) = 0. \quad (1.2)$$

Систему уравнений данного типа ($F_i = 0$) называют динамической системой. Однако и она также является весьма трудной для исследования.

Предполагая, что функции f_i полностью не зависят от времени, получаем автономную динамическую систему уравнений:

$$F_i = \frac{d\psi_i}{dt} - f_i(\psi_j, c_\alpha) = 0. \quad (1.3)$$

Для этих систем, зависящих от малого числа управляющих параметров ($k \leq 4$), существует несколько утверждений, позволяющих исследовать решения системы [1].

Функции f_i аналогичны компонентам силы в классической механике. Предполагая, что они могут быть заданы антиградиентом (по отношению к функциям ψ_j) некоторой потенциальной функции, получаем следующую систему уравнений

$$f_i = -\frac{\partial V(\psi_j, c_\alpha)}{\partial \psi_i}, F_i = \frac{d\psi_i}{dt} + \frac{\partial V(\psi_j, c_\alpha)}{\partial \psi_i} = 0, \quad (1.4)$$

которая называется градиентной системой ($\dot{\psi} = -\nabla_\psi V$).

Особый интерес представляет изучение состояния равновесия $d\psi_i/dt = 0$ градиентных динамических систем, которое может быть описано с помощью такой системы уравнений:

$$\frac{\partial V(\psi_j, c_\alpha)}{\partial \psi_i} = 0. \quad (1.5)$$

Таким образом, элементарная теория катастроф – это наука о том, каким образом состояния равновесия $\psi_j(c_\alpha)$ потенциальной функции $V(\psi_j, c_\alpha)$ изменяются при изменении управляющих параметров c_α .

Математическая теория катастроф имеет множество сфер приложения применительно к проблемам геотехники и геомеханики. Приведем в качестве примера некоторые направления исследований.

А. При изучении предельных состояний породного массива в большинстве случаев последний можно рассматривать как дискретную неустойчивую консервативную систему, поведение которой определяется потенциальной функцией. Для систем такого типа используют топологическую концепцию структурной устойчивости [2]: если имеется только один управляющий параметр λ , то в случае общего положения можно наблюдать лишь катастрофу складки, имеющую локально потенциальную функцию общего вида $q^3 + \lambda \cdot q$, где q – активная обобщенная координата (как при простой потере устойчивости).

Замечание. Катастрофа складки – слияние и исчезновение минимума и максимума под действием единственного управляющего параметра. Ей соответствует траектория равновесия XCY , которая погибает в критической точке C , меняя при этом характер устойчивости. То есть, при попадании системы в точку C происходит резкое изменение состояния системы (катастрофа), в результате чего система переходит в новое равновесное состояние. Хасслер Уитни отмечал (см., например, [2]), что во всех случаях, кроме некоторых исключительных, встречаются особенности лишь двух видов: складки и сборки, все другие особенности разрушаются при малом шевелении тел или направлений проектирования, в то время как особенности этих двух видов устойчивы и сохраняются при малых деформациях отображения.

Б. С точки зрения механики разрушения, разрушение реальных материалов объясняется развитием в них трещин из некоторых начальных дефектов (поры, трещины). Для описания прочности данных материалов широко используется понятие поверхности разрушения, однако множество предельных точек разрушения образует в пространстве параметров нагружения в общем случае не поверхность, а некоторый объем (континуум разрушения), т.е. в зависимости от пути нагружения разрушение в заданной точке континуума может как произойти, так и не произойти [3].

Введение потенциальной функции определенного вида позволяет рассматривать в рамках теории катастроф широкий класс многопараметрических задач механики разрушения. Многопараметрические задачи об одиночной трещине можно рассматривать в рамках теории катастроф при помощи потенциальной функции следующего вида:

$$V(c, p_1, p_2, \dots, p_n) = \int \left(\int_B \Gamma(c, p_1, p_2, \dots, p_n) dB \right) dc - \Gamma_c l, \quad (1.6)$$

где c – переменная размерности длины (определяющая положение фронта трещины B), p_1, p_2, \dots, p_n – параметры нагружения, Γ – удельный поток энергии на фронт трещины, равный по величине скорости освобождающейся упругой энергии, dB – элемент дуги трещины.

Величина Γ может быть определена при помощи коэффициентов интенсивности напряжений (K_1, K_2, K_3) на фронте трещины следующим образом [4]:

$$\Gamma = (2\mu)^{-1} \left[(1-\nu)(K_1^2 + K_2^2) + K_3^2 \right], \quad (1.7)$$

где μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона материала, в котором расположена трещина.

Значения коэффициентов интенсивности находятся из решения упругой задачи. Они являются некоторыми функциями переменной c и параметров нагружения p_1, p_2, \dots, p_n .

Положению равновесия, согласно теории катастроф [1], отвечают условия $\partial V / \partial c = 0$, которые приводят к уравнению вида

$$\Gamma(c, p_1, p_2, \dots, p_n) = \Gamma_c. \quad (1.8)$$

Это локальное условие разрушения, выполняющее на фронте подвижно-равновесной трещины [4]. Локальное развитие трещины устойчиво, если $\partial^2 V / \partial^2 c > 0$ (т.е. $\partial \Gamma / \partial c < 0$). Если же $\partial^2 V / \partial^2 c < 0$ (т.е. $\partial \Gamma / \partial c > 0$), то локальное развитие трещины будет неустойчивым. Граница областей устойчивости и неустойчивости имеет вид $\partial^2 V / \partial^2 c = 0$, или, что то же:

$$\partial \Gamma / \partial c = 0. \quad (1.9)$$

Множество параметров p_1, p_2, \dots, p_n , определяющих неустойчивый рост трещины (множество катастроф [1]), определяются системой (1.8),

(1.9). Поскольку гессиан функции V в данном случае совпадает с $\partial^2 V / \partial^2 c$, то это означает, что система (1.8), (1.9) определяет вырожденные критические точки функции V (неморсовского типа), что и должно быть, если следовать теории катастроф [1, 2].

Замечание. Следует отметить, что теория катастроф, конечно, не может заменить в механике хрупкого разрушения постановку и решение граничных задач, она в ряде случаев является удобным языком анализа.

В. Массив горных пород, как композиция горных пород может находиться в различных напряженных состояниях – допредельном, предельном и запредельном. Одним из показателей, отражающим состояние массива горных пород, является уровень его напряженного состояния [5]. Переход массива горных пород из одного напряженного состояния в другое сопровождается качественными изменениями в массиве – образованием новых структурных элементов с новыми свойствами. Переход массива горных пород в новое качественное состояние происходит под действием сил тектонической и техногенной природы и зависит от уровня начального напряженного состояния. Поле начальных напряжений может быть естественным гравитационным или предельно напряженным уже вблизи поверхности земли вследствие действия сил тектонической природы.

Гипотеза о возможности нахождения толщ массива, прилегающей к земной поверхности, в предельно напряженном состоянии позволяет объяснить многие процессы в массиве. Такой участок массива горных пород в каждый момент имеет предельное распределение напряжений и предельный запас потенциальной энергии [6]. На любое изменение устойчивости данного участка в целом или его отдельных частей, вследствие естественных или техногенных причин, массив будет отвечать активными деформационными процессами, стремясь восстановить существовавшее до этого предельно напряженное состояние. Данный процесс деформирования может быть эффективно промоделирован с помощью теории катастроф.

Г. Рассмотрим область породного массива, содержащую зону геологических нарушений типа мульды замещения [7]. Будем характеризовать такую область набором величин $\{\rho, V, p, \vec{a}(x)\}$. Здесь ρ – плотность вещества в зоне, V – ее объем, p – давление в зоне, $\vec{a}(x)$ – вектор-функция, описывающая “толщину” породной массы вокруг зоны до выработанного пространства или ближайших нарушений (может быть построена на основе аппарата R-функций [8]). “Толщина” зоны определяется как наименьшее расстояние от точек зоны до точек выработанного пространства или другого нарушения:

$h(\vec{a}(x)) = \inf \|\omega_0(x) - \omega_i(x)\|$. Здесь $\|\cdot\|$ – выбранная метрика пространства решения задачи, $\omega_0(x), \omega_i(x)$ – соответственно аналитические уравнения границы изучаемой области нарушения и соседних областей или/и выработанного пространства. Функции $\omega(x)$ строятся на основе теории R-функций.

Возможны два варианта состояния областей породного массива с зоной замещения:

1. объем зоны является заданной величиной (область практически не испытывает деформаций), в то время как давление p – величина определяемая, пассивная;

2. объем изменяется (в результате значительных деформаций), а давление p является заданным;

В первом случае управляющим параметром является объем зоны, во втором же – давление.

Краевые зоны (граничные поверхности) области нарушений могут быть как практически изолированы от окружающего массива, так и иметь хорошую связь с ним (например, условия теплообмена и т.п.).

Если множество управляющих параметров ограничить рассматриваемыми, то термодинамическая устойчивость таких систем в первом приближении может быть описана как катастрофа складки, т.е. потеря устойчивости рассматриваемой системы будет происходить по типу катастрофы складки.

В этом случае в качестве управляющих параметров можно рассматривать, например, такие физические и геометрические параметры, как энергия E или приведенный радиус R зоны.

Физически такое состояние системы означает ее резкий переход от одного качественного равновесного состояния (наличие зоны замещения) в новое (породный массив без напряженной зоны замещения).

Д. Рассмотрим геотехническое сооружение (или систему) в приближении дискретной консервативной системы. С большой степенью достоверности механическое состояние сооружения можно определить тремя независимыми обобщенными интегральными параметрами $\lambda_i (i = \overline{1,3})$: λ_1 характеризует влияние внешних природных факторов; λ_2 – влияние факторов техногенного характера (в том числе и субъективный человеческий фактор); λ_3 – субъективный фатальный (внутренний) человеческий фактор.

Следует подчеркнуть, что эффективная вероятность развития события в геотехническом сооружении как катастрофы (критическая ситуация), представляющей в свою очередь функцию параметров $\lambda_i (i = \overline{1,3})$, для каждого из этих трех параметров $\lambda_i (i = \overline{1,3})$ равновероятно для критических

значений каждого из трех параметров.

Например, для события «обрушение кровли в подземной выработке, повлекшее за собой травмирование человека», параметры λ_i представляют собой: λ_1 – функция, определяемая горно-геологическими и геомеханическими факторами (флуктуационные возмущения структурно-геологического строения, физико-механических характеристик и т.д.; λ_2 – фактор, определяющий ошибки проектирования горных работ (ошибки в расчетах, не учет важных факторов и др.); λ_3 – фактор, характеризующий «внутреннее эмоциональное состояние» конкретного человека (человек может быть «фатально невезучим», то есть обязательно «попадает в неприятные ситуации»).

Можно показать, что в случае описания устойчивости геотехнического сооружения/системы в таком подходе, катастрофическое развитие события Q может быть описано математически как катастрофы нескольких типов:

- типа складки: $q_1^3 + \lambda_i q_1, (i = \overline{1,3})$;
- типа сборки: $q_1^4 + \lambda_j q_1^2 + \lambda_i q_1, (i, j = \overline{1,3}; i \neq j)$;
- типа "ласточкин хвост": $q_1^5 + \lambda_k q_1^3 + \lambda_j q_1^2 + \lambda_i q_1, (i, j, k = \overline{1,3}; i \neq j \neq k)$;
- типа гиперболическая омбилика: $q_2^3 + q_1^3 + \lambda_k q_1 - \lambda_j q_2 + \lambda_i q_1 q_2, (i, j, k = \overline{1,3}; i \neq j \neq k)$;
- типа эллиптическая омбилика: $q_2^3 - 3q_2 q_1^2 - \lambda_k q_1 - \lambda_j q_2 + \lambda_i (q_1^2 + q_2^2), (i, j, k = \overline{1,3}; i \neq j \neq k)$.

Отметим, что первые три типа имеют только одну активную обобщенную координату q_1 , описывающую состояние события Q (что определяет простые формы потери устойчивости), последние два – две активные координаты q_1, q_2 (одновременная потеря устойчивости по двум формам).

Каждому из приведенных типов математических катастроф присущи свои математические особенности, которые моделируют предельные положения (катастрофические ситуации).

2. Теория устойчивости в геомеханике

Разработка подземных месторождений полезных ископаемых связана со строительством подземных геотехнических сооружений различного функционального назначения (горизонтальных и вертикальных выработок, тоннелей, панелей и др.), создающих инверсию плотности породного массива и инициирующих конвекцию вещества из неповрежденных областей пространства в технологические пустоты (выработанное

пространство). В механике горных пород и массивов в настоящее время используется несколько подходов к объяснению механизма формирования силовой нагрузки в массиве горных пород в окрестности контура подземной выработки. Наиболее распространенной является теория сводообразования, строгое научное обоснование которой впервые, наверное, было выполнено М.М. Протодяновым, а затем и Т. фон Карманом. В настоящее время имеется несколько новых представлений, теорий о формировании напряженно-деформированного состояния в подработанном массиве горных пород. Весьма интересной представляется, например, концепция дезинтеграции породного массива в окрестности подземных сооружений [9]. Правильная оценка распределения напряжений и деформаций в окрестности подземных выработок обеспечивает их надежную эксплуатацию и устойчивость на заданный срок. Устойчивость выработок зависит от большого числа факторов, наиболее существенными являются горно-геологические и горнотехнические, которые существенным образом определяют систему ведения горных работ.

Исследование на статическую устойчивость механических систем дает возможность получить формулы для критических сил, которые в некоторых случаях могут использоваться как нижние оценки нагрузок, вычисляемых при решении задач предельного состояния [10]. В случае, когда система функционирует в рамках обратимых состояний, конструкции могут быть описаны потенциальной функцией, минимальное значение которой определяет локально устойчивое состояние системы [11].

Исследование динамических явлений, заключительной фазой которых является разрушение, связано с рассмотрением *потери устойчивости состояния равновесия*. Поэтому изучение устойчивости состояния представляет важную задачу, позволяющую понять механизм катастрофических процессов, получить обоснованные и корректные критерии опасности, правильно оценить состояние геомеханических и геотехнических объектов.

С точки зрения катастрофических последствий динамических явлений особый интерес представляет класс задач о потере устойчивости при разрушении. Например, значительная часть деформационных критериев в теории пластичности фиксирует бифуркацию. Рассмотрение роста трещин также является ответом на вопрос об устойчивости решения математической задачи, описывающей поведение трещин. Опасность горных ударов оценивается с позиций теории устойчивости. Общим для этих задач, является их внутренняя сущность процессов, состоящая в том, что во всех случаях потеря устойчивости вызывается особенностями

деформаций за максимумом нагрузки – за предельных деформаций.

Исчерпание несущей способности механической системы может характеризоваться либо набором значений $\{\varepsilon_{ij}^{\text{lim}}; \sigma_{ij}^p\}$, или $\{\sigma_{ij}^{\text{lim}}; \varepsilon_{ij}^p\}$. В первом случае система «теряет» несущую способность при достижении деформациями предельных значений $\varepsilon_{ij}^{\text{lim}}$, а σ_{ij}^p определяют значения нагрузок, соответствующих данному уровню деформаций. Во втором случае равновесие механической системы нарушается при достижении нагрузками предельных значений σ_{ij}^{lim} . Деформации при этом ε_{ij}^p могут быть гораздо меньше предельных значений $\varepsilon_{ij}^{\text{lim}}$.

Вместе с тем, несущая способность механических систем можно определять и по значениям, которые меньше предельных значений. Это критические значения деформаций или нагрузки, при которых происходит смена форм равновесия (явление бифуркации).

Состояния равновесия механических конструкций удобно исследовать путем построения кривых состояния в системе «нагрузка - перемещения» (интенсивность напряжений - интенсивность деформаций). При достижении предельных значений происходит «резкий переход» системы к новому устойчивому состоянию равновесия.

Наличие ниспадающего участка на диаграмме «напряжения-деформации» приводит к тому, что классическая постановка динамических задач оказывается невозможной и стандартный подход всегда фиксирует неустойчивость в момент достижения нагрузкой максимума независимо от способа нагружения. Однако, с практической точки зрения при жестком нагружении, когда контролируются деформации, никакой неустойчивости не ощущается. Эффекты, воспринимаемые как потеря устойчивости (неограниченное нарастание смещений, сотрясения, разлет осколков), происходят лишь при мягком нагружении. Поэтому, для того чтобы теория отвечала практическим потребностям, необходимо модифицировать классические определения, а именно:

- исключить «динамические» вариации полей в предельной области (т.е. варьируемые поля в этой области должны давать напряжения, удовлетворяющие статическим уравнениям равновесия);

- изменить определение возможных смещений (таким образом, что под возможными понимаются такие смещения, которые не только удовлетворяют граничным условиям, но и дают в предельной зоне напряжения, для которых выполняются статические уравнения равновесия).

Отметим, что дополнительное ограничение касается лишь зоны предельной деформации. Так, например, в области упругих деформаций реологические соотношения в равной мере пригодны как для статических,

так и для динамических задач и потому в них используется традиционное понятие о возможных смещениях [12].

Неустойчивость в такого рода задачах согласно [12], ассоциируется прежде всего со значением разности между приращением работы внешних сил ΔA и приращением внутренней энергии ΔE и преобразованием этой разности в кинетическую энергию (ΔK), сопровождаемым приобретением определенной скорости элементами среды. Поэтому, потеря устойчивости определяется как превышение (или по меньшей мере не убывание) приращения работы внешних сил над приращением внутренней энергии при неизменных внешних условиях. Данная разность обозначается ΔK : $\Delta K = \Delta A - \Delta E$. При этом рассматривается *устойчивость в малом и устойчивость в большом*. В первом случае исследуется лишь тенденция в изменении ΔK при бесконечно малых возмущениях. Во втором – изучаются изменения ΔK при конечных смещениях вплоть до таких, которые отвечают полному разрушению в предельно-напряженной зоне (например бесконечно малые возмущения).

Неустойчивость в малом автоматически влечет неустойчивость в большом. Обратное имеет место далеко не всегда, но в процессе достижения неустойчивости в большом заданного состояния система проходит через некоторое новое состояние, которое неустойчиво в малом [12, 13].

В соответствии с определением, устойчивым в малом называется такое состояние равновесия, для которого при любых малых возможных смещениях $\Delta K < 0$. Устойчивым в большом называется состояние, для которого величина $\Delta K < 0$ при возможных конечных смещениях вплоть до отвечающих полному разрушению.

Тогда, в противоположных случаях, т.е. если возможны ситуации, что существуют бесконечно малые (конечные, вплоть до отвечающих полному разрушению) возможные смещения, для которых $\Delta K \geq 0$, то такие состояния называются неустойчивыми в малом (соответственно большим).

Эти определения имеют три отличия, по сравнению с обычными определениями возможных перемещений и устойчивости состояния механической системы. Во-первых, возможные смещения трактуются в «нетрадиционном» смысле. Во-вторых, при изучении устойчивости в большом величина допускаемых смещений ограничена значениями, отвечающими полному разрушению *в запредельной области*. И, в-третьих, устойчивость во всех случаях оценивается по знаку приращения ΔK .

Выбор между исследованием устойчивости в малом и в большом определяется сутью рассматриваемой задачи, связанной с исследованием разрушения, конечными целями изучения устойчивости, и соображениями,

касающимися простоты решения. Данные определения дополняют друг друга. Так, первое определение (устойчивости в малом) полезно для оценки общей тенденции к потере устойчивого состояния и для фиксации неустойчивости в процессе решения задачи по шагам. Второе (устойчивость в большом), будучи более общим, обеспечивает возможность дополнительного контроля устойчивости и введения меры неустойчивости. При этом оказывается, что исследование устойчивости в малом проще, чем рассмотрение устойчивости в большом.

Использование введенных характеристик требует расчета приращения ΔK . Общие выражения для этого приращения (и соответственно критерии устойчивости, равно применимые для различных классов задач механики) приведены в [12, 13]. Так, для задач механики горных пород условие устойчивости имеет вид:

$$\Delta K = \int_{S_*} \left[\int_0^{\Delta u_i} (\Delta \sigma_{ni2} - \Delta \sigma_{ni1}) d\Delta u_i \right] dS < 0, \quad (1.2)$$

где S_* – поверхность, отделяющая область V_1 допредельных деформаций от области V_2 запредельных деформаций; Δu_i – возможное поле приращений смещений; $\Delta \sigma_{ni1}$ – предельные значения на S_* приращений напряжений, получаемых в результате решения задачи для области V_1 при заданных приращениях Δu_i на S_* и граничных условий на оставшейся части границы V_1 , определяемых постановкой исходной задачи (в закрепленных точках $\Delta u_i = 0$; в точках, где заданы нагрузки, $\Delta \sigma_{ni1} = 0$); $\Delta \sigma_{ni2}$ – предельные значения на S_* приращений напряжений, получаемых при решении аналогичной задачи для области V_2 .

В общем случае $\Delta \sigma_{ni1}$ и $\Delta \sigma_{ni2}$ на S_* не совпадают, поскольку законы деформирования в объемах V_1 и V_2 разные.

Неравенство (1.2) должно выполняться на любом возможном поле Δu_i , удовлетворяющем граничным условиям и дающем приращения напряжений, для которых статические уравнения равновесия выполняются как в объеме V_1 , так и в объеме V_2 .

Состояние системы является неустойчивым, если существует возможное поле Δu_i , отвечающее оговоренным для (1.2) условиям, для которого выполняется неравенство противоположного знака,

$$\Delta K = \int_{S_*} \left[\int_0^{\Delta u_i} (\Delta \sigma_{ni2} - \Delta \sigma_{ni1}) d\Delta u_i \right] dS \geq 0. \quad (2.2)$$

В случае, если окажется, что $\Delta \sigma_{ni2} = \Delta \sigma_{ni1}$ на S_* , то, поскольку удовлетворены все граничные условия, уравнения равновесия и реологические соотношения, то имеем просто новое решение задачи $u_{i0} + \Delta u_i$,

$\sigma_{ij0} + \Delta\sigma_{ij}$ (u_{i0}, σ_{ij0} – смещения и напряжения в исследуемом состоянии равновесия). При этом, $\Delta K = 0$.

Подобное положение может возникать, например, при рассмотрении устойчивости в малом в задачах с достаточно гладким переходом от дозапредельных деформаций к запредельным деформациям (гладкость перехода исключает разрывы в приращениях напряжений на границе S_*). Имеет место бифуркация решения. Таким образом, бифуркация является частным случаем потери устойчивости по критерию (2.2), которому отвечает равенство $\Delta K = 0$. Это замечание иллюстрирует связь между устойчивостью решения и устойчивостью соответствующего ему состояния равновесия физической системы.

Алгоритм использования приведенных условий (1.2) и (2.2) при рассмотрении конкретных процессов состоит в следующем. Решается задача для внешних условий и определяются напряжения, относительные деформации и смещения, отвечающие исходному состоянию равновесия, которое исследуется на устойчивость. Чтобы определить, устойчиво ли это состояние, необходимо, задавшись на S_* произвольными значениями Δu_i , решить статические задачи для объемов V_1 и V_2 , требуя, чтобы не нарушались граничные условия на границах отличных от S_* . В результате находятся напряжения $\Delta\sigma_{ij}$ и смещения Δu_i во всем объеме V и, тем самым, предельные значения $\Delta\sigma_{ni1}$ (при стремлении к S_* из V_1) и $\Delta\sigma_{ni2}$ (при стремлении к S_* из V_2).

Замечание. Нормаль является внешней к V_1 .

По найденным значениям описывается величина ΔK , определяемая из условий (1.2) и (2.2). Если она положительна или равна нулю, то исследуемое состояние неустойчиво. В противоположном случае имеет смысл провести вычисления для других полей Δu_i , на которых можно ожидать потери устойчивости.

Неравенства (1.2) и (2.2) можно представить в другом виде, удобном для приложений при исследовании устойчивости в большом [12].

3. О проблеме инверсии плотности материи

Рассмотрим проблему инверсии плотности материи. Инверсия плотности материи, начиная со времен Большого взрыва является источником как устойчивости, так и неустойчивости объектов Вселенной, начиная с масштабов элементарных частиц и кончая масштабами галактики.

Несколько замечаний относительно терминологии. Термином «поверхностная неустойчивость» обозначается существование смежной

формы равновесной поверхности (свободной или межфазной). Термином «выпучивание» обычно обозначается именно такой тип неустойчивости, связанный с изменением формы тела под действием критической нагрузки. *Внутренняя неустойчивость* в трехмерных телах определяется возможностью сведения задачи устойчивости к бифуркационной проблеме для определяющих соотношений дифференциального типа [10, 11]. Инверсия плотности в жидкостях, когда, например, слой жидкости большей плотности лежит на слое меньшей плотности, создает неустойчивость и изучается в гидростатике. Устойчивость коллоидных растворов играет важную роль во многих процессах, изучаемых химической кинетикой. Седиментация более тяжелой фазы может рассматриваться как проявление рассеянной конвекции.

1. В рамках классической механики Ньютона распределение плотности в пространстве определяет потенциал сил Φ , удовлетворяющий уравнению Пуассона вида [14].

$$\Delta\varphi = A\rho, \quad \bar{F} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right). \quad (3.1)$$

В твердых телах плотность создает потенциал гравитации, который зависит от распределения плотности согласно формуле [15]:

$$\varphi(\bar{r}) = \int \Phi(\bar{r} - \bar{r}') R(\bar{r} - \bar{r}') \rho(\bar{r}') d\bar{r}', \quad \bar{r} = (x, y, z). \quad (3.2)$$

Здесь $\Phi(\bar{r} - \bar{r}')$ – потенциал взаимодействия между частицами, $R(\bar{r} - \bar{r}')$ – корреляционная функция, учитывающая взаимодействие соседних частиц, в том числе не контактирующих с частицей в точке \bar{r}' (нелокальность).

В случае $R(\bar{r} - \bar{r}') = A$, применяя к (3.2) оператор Лапласа, получаем, что если Φ удовлетворяет уравнению Лапласа вида

$$\Delta\Phi = \delta(\bar{r} - \bar{r}'), \quad (3.3)$$

то φ удовлетворяет (3.1), а $\Phi(\bar{r} - \bar{r}')$ является функцией Грина уравнения Лапласа.

В твердых телах плотность создает потенциал гравитации, удовлетворяющий уравнению (3.1) и зависящий от распределения плотности по формуле (3.2).

Как известно, в тоннелях, подземных горных выработках имеют место вывалы и обрушения по контуру подземного сооружения (кровли, боковых поверхностей). Большое значение в устойчивости кровли выработок играет явление сводообразования. При явном формировании свода обрушения по линиям сдвига и скольжения, устойчивость породной массы в объеме свода определяется силой тяжести и блочной структурой. Важной задачей, в связи с этим, является определение критических размеров свода, главным образом

ширины по кровле выработки. Выполненных и выполняемых исследований в этом направлении, связанных с построением и решением модельных задач, очень много. Данный факт обусловлен сложностью и многогранностью геомеханических процессов, в совокупности определяющих физические процессы в массивах горных пород в окрестности подземной выработки.

В качестве одной из модельных задач может быть рассмотрена задача «о гравитирующем стержне» [10] (рис.3.1).

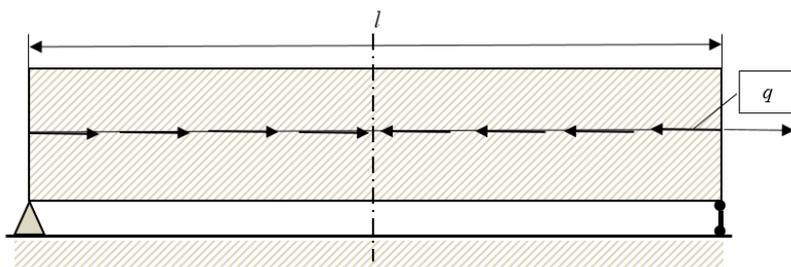


Рис. 3.1. Модельная задача «о гравитирующем стержне»

В одномерном случае в качестве уравнения, описывающего состояние такого стержня, можно принять уравнение такого вида [10]:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi k\rho. \quad (3.4)$$

Потенциал φ создает массовые силы $d\varphi/dx$, вычисляемые согласно (3.1) и действующие соответственно на каждую материальную частицу стержня объемные силы $\rho d\varphi/dx$. Результирующая объемных сил в каждом сечении создает погонную силу q , равную

$$q = \rho S \frac{d\varphi}{dx} = -4\pi k\rho^2 Sx + C_1, \quad (3.5)$$

где S – площадь поперечного сечения стержня.

В исходном (равновесном) состоянии

$$q = \frac{dN^0}{dx}, Q^0 = 0, M^0 = 0, w = 0, p = 0. \quad (3.6)$$

Задача сводится к «бифуркационной проблеме» [10, 11] и критическая длина, когда возможна смежная форма равновесия (выпучивание вниз), зависит от параметров задачи:

$$l_{kp} = \left(\frac{42 EJ}{k\pi\rho^2 S} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.7)$$

где J – момент инерции сечения стержня.

Таким образом, инверсия плотности (порода – пустота) создает силы, под действием которых происходит перенос масс стержня в направлении

градиента потенциала. Как известно, плотности различных материалов не сильно различаются между собой, поэтому силы гравитации, равные

$$P_{kp} = -\frac{d\varphi}{dx} = \int_{-l_{kp}/2}^{l_{kp}/2} \frac{dG(x-x_1)}{dx} \rho(x_1) dx_1 = G\rho|_{-l_{kp}/2}^{l_{kp}/2} + \int G(x-x_1) \frac{d\rho}{dx_1} dx, \quad (3.8)$$

и пропорциональные $\text{grad}\rho$, также невелики. Однако, их действие в течение длительного времени может быть причиной разрушения породных масс с образованием трещин или линий скольжения и вывалов пород. Очевидно, что учет несовершенств, динамичности нагрузок может приводить к уменьшению критической длины в кровле свода тоннеля/выработки.

В качестве модельной задачи исследования устойчивости боковых граней тоннеля/выработки, рассмотрим задачу устойчивости конечного стержня, удерживаемого упругими связями с оставшимся массивом горных пород (рис. 3.2). Стержни в данной модельной задаче принимаем невесомыми. На рисунке 3.2 представлен поперечный разрез подземной выработки. Модельная задача обладает осевой симметрией. Считая, что $q=0, N^0=P$, для P будем иметь такое уравнение:

$$P = -kw, \quad (3.9)$$

где k – жесткость пружины (характеристика массива в боковых стенках выработки).

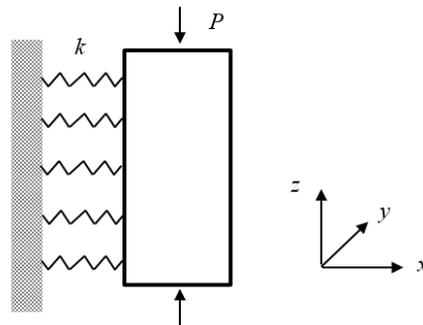


Рис. 3.2. Модельная задача исследования устойчивости боковых граней тоннеля/выработки

Считая E, J постоянными, для прогиба w имеем такое уравнение [10]:

$$w^{(IV)} + \lambda^2 w^{(II)} + \mu^2 w = 0, \quad \lambda^2 = \frac{P}{EJ}, \quad \mu = \frac{k}{EJ}. \quad (3.10)$$

Сводя задачу к бифуркационной в случае шарнирного закрепления концов, для критической силы получается выражение

$$P_{kp} = EJ \left(\frac{\pi^2 (n_1^0)^2}{l^2} + \frac{\mu l^2}{\pi^2 (n_1^0)^2} \right). \quad (3.11)$$

В случае $n_1^0 = 1$:

$$w = C_1 \sin \frac{n_1^0 \pi x}{l} + C_2 \cos \frac{n_1^0 \pi x}{l}. \quad (3.12)$$

Из (3.12) следует, что при критической силе (3.11) возможна потеря устойчивости по многомодовой форме, а не только выпучивание по одной волне, характерной для Эйлеровой потери устойчивости, которая здесь тоже может быть рассмотрена.

2. Этапы устойчивого эволюционирования звезд, связанные с их уплотнением, увеличением массы, прерываются резким изменением структуры, переходом в новое устойчивое состояние, состояние термодинамического равновесия. Эти неустойчивости получили название гравотермических катастроф [11]. Общая теория относительности предсказывает гравитационный коллапс массивной холодной звезды, что представляет собой чисто механическую проблему потери устойчивости и связанную с достижением больших значений скалярной кривизны пространства – времени или плотности [16].

Решение уравнения состояния (равновесия) холодной звезды представлено на рис. 3.3 и характеризует зависимость массы-энергии $M M_s^{-1}$ от центральной плотности ρ_0 г/см³. Зависимость кривизны пространства от энергии – массы определяется уравнением Эйнштейна [16].

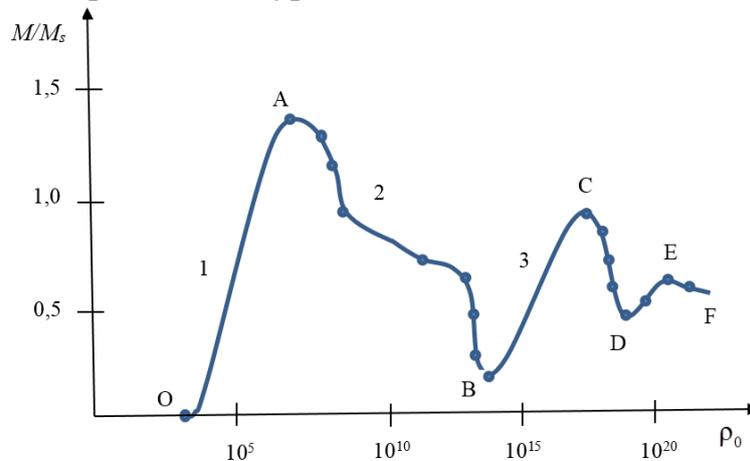


Рис. 3.3. Графическое представление решения уравнения состояния холодной звезды

На рисунке 3.3: M_s – масса Солнца. Участок 1 (OA) соответствует устойчивому состоянию (белый карлик), участок 2 (AB) – неустойчивое состояние и участок 3 (BC) – опять устойчивое состояние (нейтронная звезда).

Из рисунка 3.3 следует, что при увеличении плотности возможны только две смежные сферические формы равновесия: белый карлик и нейтронная звезда. Точкам A и C соответствуют критические положения

равновесия, которые в формате теории катастроф называются складками [11]. В этом состоянии равновесия гравитационные силы достигают критических значений, под действием которых может начаться коллапс (потеря устойчивости). Из рисунка 3.3 так же видно, что за состоянием критического равновесия C следует дестабилизация системы (участок DEF).

В рамках рассматриваемой модели гравитационный коллапс звездной системы качественно подобен классической задаче Эйлера о потере устойчивости стержнем. Тогда, в терминах теории катастроф, для такой аналогии ρ_0 представляет собой обобщенную координату состояния (параметр порядка), M играет роль управляющего параметра.

Если в задаче Эйлера переход из одного устойчивого состояния в другое в связи с преодолением барьера потенциальной энергии, обусловленного жесткостью стержня, то в гравитирующей массе точке A соответствует преодоление потенциального барьера, обусловленного электронной жесткостью, а в точке C силы гравитации преодолевают ядерную жесткость [16].

В данном случае плотность не испытывает инверсии, поэтому неустойчивости в точках A и C являются следствием достижения гравитационной силой критических значений при достаточно плавном росте плотности. Как указывалось в разделе 3, в рамках классической механики Ньютона распределение плотности в пространстве определяет потенциал сил φ , удовлетворяющий уравнению Пуассона вида (3.1). Под действием массовых сил \bar{F} частицы среды могут преодолевать сопротивление связей и перемещаться в направлении гравитирующей массы так, что плотность агрегации растет. Если формирующаяся центрально симметричная структура является фракталом, то ее плотность зависит от радиуса в соответствии с формулой [17]:

$$\rho(r) \cong r^{d-D}, \quad (3.13)$$

где D – размерность евклидова пространства, d – размерность Хаусдорфа – Безиковича.

В твердых телах плотность создает потенциал гравитации, который зависит от распределения плотности согласно формуле (3.2).

Формирование планет идет под влиянием многих факторов, одним из которых является сила гравитации так, что изменение плотности во времени и пространстве определяется уравнением

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) = 0, \quad (3.14)$$

согласно которому перенос вещества со скоростью \bar{v} обуславливает изменение плотности в пространстве и времени.

Направление переноса вещества определяется величиной $\text{grad}\rho$, а перенос вещества осуществляется согласно закону типа Фика и имеет следующий вид:

$$\bar{q} = \chi \text{grad}\rho, \quad (3.15)$$

где вектор потока вещества \bar{q} имеет направление увеличения плотности под действием гравитации.

Если частицы среды свободно могут перемещаться в пространстве, то может возникнуть поток вещества из более плотной части среды в менее плотную часть среды при отсутствии сил, препятствующих этому движению.

Пусть плотность вещества, занимающего объем V , постоянна. Если в данной области изъять некоторый малый объем вещества, то образуется полость с нулевой плотностью $\rho = 0$. Полость будет постепенно заполняться веществом и уменьшать свой радиус. Градиент плотности будет направлен к центру полости. Воздух или жидкость, находящиеся в полости, будут сжиматься, соответственно давление увеличиваться. Из формулы (3.2) следует:

$$\text{grad}\phi = \int_V \text{grad}G(r-r')\rho(r')dr' = G\rho|_{r=0} + \int_V G(r-r')\text{grad}\rho(r')dr'. \quad (3.16)$$

На основании (3.16) получаем, что $\text{grad}\phi \parallel \text{grad}\rho$.

Формирование планет происходит под действием силы гравитации, что дает для Земли неоднородное распределение плотности от поверхности к центру. На сегодня предложено большое количество моделей распределения плотностей (см., например, [18]).

На рисунке 3.4 изображена двухплотностная модель Земли [19-21], для которой плотность в слоях имеет смысл осредненной функции. Закономерность увеличения плотности планеты с глубиной нарушается явлениями инверсии плотности природного и техногенного происхождения.

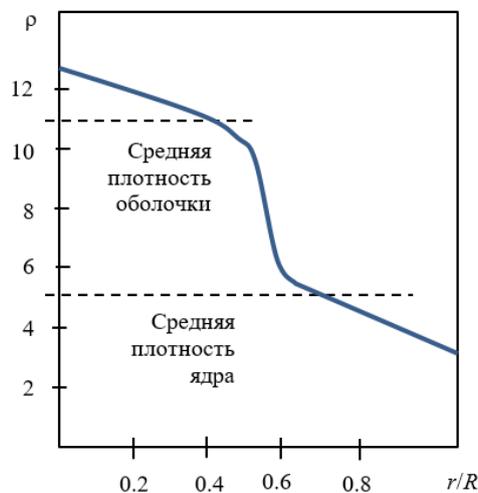


Рис. 3.4. Двухплотностная модель Земли

Уравнение (3.1) в сферической системе координат в случае модели центрально симметричного шара радиуса R имеет следующий вид [18]:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2M(r)\varphi}{r^3} = -4\pi G\rho(r). \quad (3.17)$$

Здесь $\varphi(r) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r)$, причем $\varphi_1(r)$ – потенциал шара плотности $\rho(r)$ во внешней точке по отношению к шару радиуса r , $\varphi_2(r)$ – потенциал слоя коры во внутренней точке по отношению к слою.

$$\varphi_1(r) = \frac{4\pi G}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad (3.18)$$

$$\varphi_2(r) = 4\pi G \int_r^R \rho(r') r' dr'. \quad (3.19)$$

Сила гравитации направлена по радиусу к центру $r=0$ и вычисляется по формуле:

$$F(r) = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{M(r)\varphi}{r^2}, \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (3.20)$$

Максимальное значение силы может достигаться во внутренних точках шара, в которых

$$\frac{dF(r)}{dr} = 0. \quad (3.21)$$

Данное выражение можно записать в эквивалентной форме

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = 0. \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует, что максимум сил гравитации внутри шара достигается в точках перегиба функции потенциала $\varphi(\bar{r})$.

Для двухплотностной модели средняя плотность вычислена с большой точностью и равна $\langle \rho \rangle = 5,517 \text{ г/см}^3$ [21]. Тогда для нахождения плотностей ядра и оболочки используется закон смесей вида

$$\langle \rho \rangle = \frac{(R^3 - r_1^3)}{R^3} \rho_2 + \frac{r_1^3}{R^3} \rho_1. \quad (3.23)$$

Здесь ρ_1, ρ_2 – плотности ядра радиусом r_1 и плотность оболочки толщиной $(R - r_1)$ соответственно, $R=6371$ км для Земли.

Потенциал шара в точке оболочки будет равен

$$\varphi(r) = 2\pi G \rho_1 r_1^2 \left[\frac{2r_1}{3r} (1-n) + n \left(\frac{r_1^2}{r^2} - \frac{r^2}{3r_1^2} \right) \right], \quad (3.24)$$

где $n = \rho_2 / \rho_1$.

Модель имеет две внутренние точки перегиба. Одна – на границе области и ядра, другая – при

$$\frac{r_1^3 \rho_1 + \rho_2 (r^3 - r_1^3)}{\rho_2 r^3} = \frac{3}{2}. \quad (3.25)$$

Если положить $r_1/R=0,548$, $\rho_1=11,0\text{г/см}^3$, $\rho_2=4,437\text{г/см}^3$, то окажется, что выбор ρ_1, ρ_2 для разных материалов в широком диапазоне дает погрешность порядка 1%. Многочисленные экспериментальные данные указывают на слабую зависимость плотности от вида материала [21].

Аппроксимация сплайнами позволяет построить модель в среднем двухплотностного шара с неоднородными свойствами ядра и оболочки (рис. 3.4).

Таким образом, *точки локального максимума силы притяжения в шаре могут существовать только на таком расстоянии от центра, где плотность составляет 2/3 от средней плотности ядра.*

Гравитация формирует рельеф (кривизну) пространства не только вне и внутри планеты, но и на ее поверхности, что на современном этапе хозяйственной деятельности представляется для человечества наиболее важным. Плотность и ее распределение определяют масштаб высоты гор, высоту образования волн, скорость фильтрации и т.д. через действие силы тяжести. Максимальная высота гор имеет, как известно, порядок 10 км, их форма в среднем близка к оптимальной (пирамидальной) [21].

3. Гравитация – неутомимый строитель Вселенной, что достоверно установили Ньютон и Эйнштейн. Вместе с тем, вопрос «об архитекторе» остается открытым. С феноменом влияния силы тяжести на высоту возводимых сооружений впервые видимо столкнулись древние строители Вавилонской башни, а также египтяне при строительстве гробниц фараонов. Древние гробницы фараонов строились сначала по кирпичной технологии в виде мастабов (прямоугольных гробниц). Около 2650 года до н.э. произошло принципиальное изменение стиля, форм, технологий возведения погребений для фараонов.

Фараон Джоссер (точнее его визирь и строитель Именхотеп) решил изменить дизайн и технологию строительства мастаб. Он возвел для себя гробницу мавзолейного типа, имеющую 6 ступеней вместо одной, смонтированных из каменных блоков типа кирпичей (рис. 3.5).

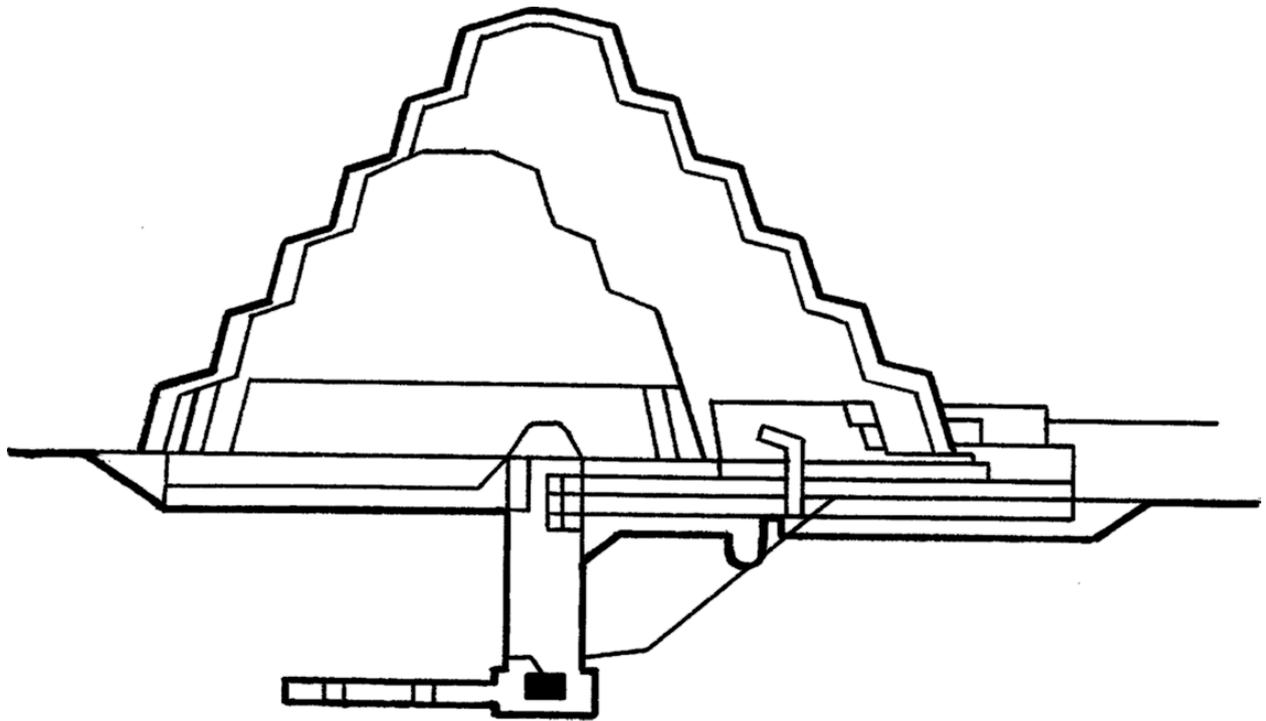


Рис. 3.5. Эскиз гробницы фараона Джосера мавзольного типа

Гробница Джосера оказалась успешным проектом, прекрасно сохранившимся до наших дней и послужившей эталоном для строительства последующих пирамид, наиболее известной из которых является гробница фараона Хуфу (Хеопса).

Сооружение этих объектов явилось одним из первых примеров создания искусственной инверсии плотности, которая не привела к неустойчивости и катастрофам. В дальнейшем эволюция вида пирамид развивалась в направлении превращения ступенчатых сооружений в пирамидальные путем заполнения ступеней щебнем и облицовкой плитами. В последующих поколениях пирамиды возводились из кирпича по описанной технологии. Следующая технологическая революция (2596 лет до н.э.) в строительстве пирамид связана с фараоном Снофру, который был отцом фараона Хуфу, построившего пирамиду, известную как пирамида Хеопса. Снофру построил три пирамиды. Первую пирамиду, построенную в Мейдуме по традиционной кирпичной технологии, он забраковал в качестве последнего пристанища для себя. Вторую пирамиду в Дахшуре начали возводить не из кирпича, а из блоков известняка, весящих две и более тонн. Пирамида должна была иметь размеры основания 157 м, высоту 125 м, угол наклона граней 58° - 60° . Однако по достижении половины запланированной высоты строители поменяли угол наклона до 54° , увеличили размеры основания со стороной до 188 м. Второй этап

строительства завершился, когда пирамида достигла высоты 59 м. Третий этап строительства характеризуется еще одним уменьшением угла до 43° , так что в конечном счете высота пирамиды оказалась равной 105 м, а ее профиль ломаным (рис. 3.6).

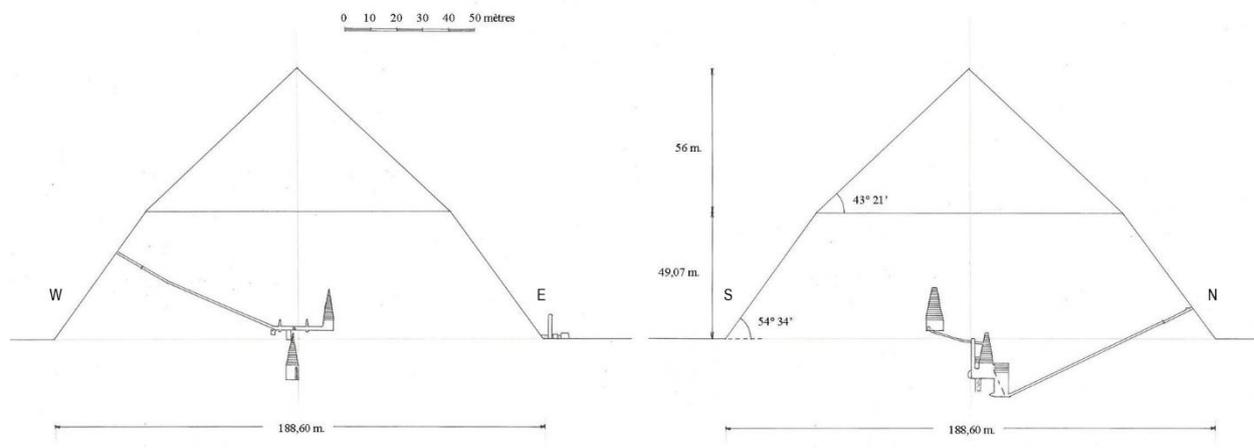


Рис. 3.6. Схематичный вид ломаной пирамиды

Существует несколько версий причин изменения угла наклона гробницы и, как следствие, наличие ломаного профиля. Рассмотрим объяснения с точки зрения теорий устойчивости предельного равновесия и катастроф.

Инверсия плотности возникает вследствие того, что материал пирамиды (известняк) имеет большую плотность, чем песок, на котором сооружалась пирамида. Под *устойчивостью пирамиды* будем понимать состояние, при котором высота пирамиды, опущенная из вершины, вертикальная, а горизонтальные сечения параллельны и самоподобны. Как известно, для кирпичной технологии сооружения пирамиды ее основание выкладывалось из кирпичей под углом. Это обеспечивало большую площадь контакта ребристой поверхности с песком и как следствие уменьшение давления. По традиции строители ломаной пирамиды уложили блоки основания под углом. Однако это привело к эффекту выдавливания песка из-под блока при достижении предельного состояния песка. В простом случае, когда блоки основания уложены горизонтально, предельное состояние наступает при достижении нагрузкой P предельного значения, что обеспечивает погружение основания в песок с постоянной скоростью. Очевидно, что погружение построенной на первом этапе части пирамиды воспринималось как катастрофа, для предотвращения которой строители решили уменьшить вес вышележащей части за счет уменьшения угла наклона граней.

Как известно (см., например, [22, 23]), простейший анализ предельного состояния может быть проведен на основе модели идеально пластического тела (рис. 3.7). В этом случае под пирамидой реализуется пластическое течение. Основание пирамиды-штампа покоится на жестком треугольнике среды в плоском случае или на жесткой пирамиде и внедряется в полупространство с постоянной скоростью v , выдавливая материал по линиям скольжения.

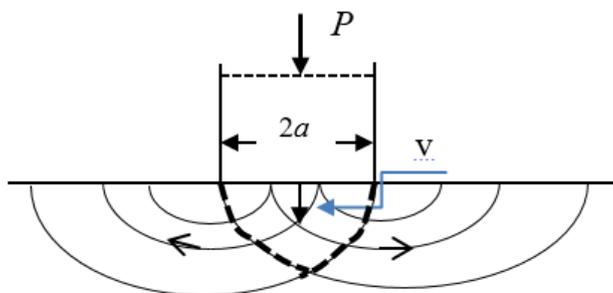


Рис. 3.7. Схема образования линий скольжения при вдавливании штампа в идеально пластическое основание

В случае трехмерной задачи для определения предельного состояния построить поверхности скольжения сложно. Обычно используется сочетание статических и кинематических методов предельного состояния для получения верхних и нижних границ истинной предельной нагрузки [22, 24, 25]. При моделировании процесса погружения в песок строящейся пирамиды при использовании жестко-пластической модели поведения грунта необходимо учесть, что, хотя ломаная пирамида строилась не из глиняных кирпичей, а из блоков, строители укладывали блоки в основание пирамиды по старой технологии под углом к поверхности, что соответствует модели внедрения пирамидального индентора в основание (грунт), представленное материалом с начальным течением (рис. 3.8) [22, 24, 25].

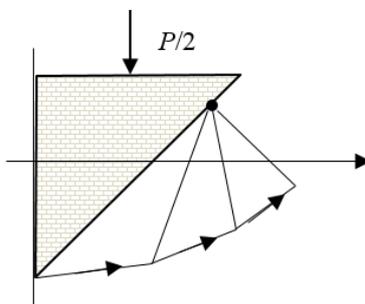


Рис. 3.8. Схема в разрезе внедрения пирамидального индентора в жестко-пластическое основание и образование линий скольжения

Решение модельной задачи показывает, что материал грунта

выдавливается (рис. 3.8) и образует отвалы свободной поверхности вокруг основания пирамиды. Строители пирамиды увеличивали площадь основания, укладывая блоки по периметру и тем самым уменьшали объемы выдавливания. При этом не учитывался тот факт, что под действием давления пирамиды на песок происходит его уплотнение в центре основания пирамиды (консолидация) и возникает горизонтальная инверсия от центра основания к краям, что должно приводить к конвекции сыпучего материала [26, 27]. Моделирование процесса и расчеты можно выполнить на основе теории пластичности пористых (сжимаемых) сред [28], неизвестных древним египтянам. Уплотнение (консолидация) песка происходит за счет изменения конфигурации порового пространства, объем которого уменьшается. Сопоставляя каждой конфигурации песчинок свою величину энтропии, получаем убывание энтропии, что связано с ростом термодинамической неравновесности, а с точки зрения механики сплошной среды – неустойчивости равновесного состояния. В этом случае рассмотрение в рамках механики сплошной среды требует в дополнение к уравнениям равновесия использовать уравнение неразрывности, которое в прямых обозначениях записывается в таком виде [28]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\varepsilon = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i = \varepsilon, \quad (3.26)$$

где $\rho = \rho(t, x, y, z)$ – плотность, ε – тензор скорости объемной деформации.

Условие пластичности учитывает пороговый характер возникновения пластических деформаций, т.е. зависит от инвариантов тензора напряжений. Для сжимаемых сред оно (условие пластичности) зависит еще от плотности и в общем случае от каких-либо параметров упрочнения–разупрочнения $\chi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. К системе уравнений состояния среды необходимо добавить кинетические уравнения относительно параметров упрочнения среды $\chi_k(t)$ [28].

Связь между динамическими (напряжения) и кинематическими (скорости деформаций) величинами устанавливается в математических моделях на основании вариационных принципов. В теории пластичности широко используется принцип максимума Мизеса, применение которого позволяет получить ассоциированный закон пластического течения, устанавливающий зависимость скоростей деформаций от напряжений [24, 28]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \dot{\lambda} \Phi_{,ij} \text{ при } \Phi = 1, \dot{\Phi} = 0, \dot{\lambda} \geq 0; \\ \dot{\lambda} &= 0 \text{ при } \Phi < 1 \text{ и при } \Phi = 1, \dot{\Phi} < 0; \\ \dot{\Phi} &= \Phi_{,ij} \dot{\sigma}_{ij} + \Phi_{,p} \dot{\rho} + \Phi_{,\chi_k} \dot{\chi}_k \end{aligned} \quad (3.27)$$

Здесь $\Phi(\sigma_{ij})=1$ – условие текучести (пластический потенциал), λ – множитель Лагранжа.

Как известно, в пористых материалах наблюдаются явления, которые трактуются как переход от устойчивого состояния к неустойчивому. В песчаных средах переход от устойчивого состояния к неустойчивому связывается с появлением полос Людерса [26 – 30]. В уплотняемых средах удельная скорость изменения объема равна $\varepsilon = \varepsilon_{ij}\delta_{ij} = \dot{\lambda} \partial\Phi/\partial\sigma$, а интенсивность скоростей сдвига $\eta = \sqrt{2\eta_{ij}\eta_{ij}}$. Дилатансионное соотношение, определяющее зависимость между характеристиками сдвиговой и объемной деформации при уплотнении имеет вид [28]:

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{\partial\Phi/\partial\sigma}{\partial\Phi/\partial\tau}. \quad (3.28)$$

В (3.28) учтено, что условие пластичности $\Phi(\sigma_{ij})$ не зависит от третьего инварианта тензора напряжений. В этом случае на плоскости (p, τ) (рис. 3.9) условие пластичности имеет вид замкнутой кривой, где вектор (ε, η) характеризует течение, перпендикулярное $\Phi(\sigma_{ij})$.

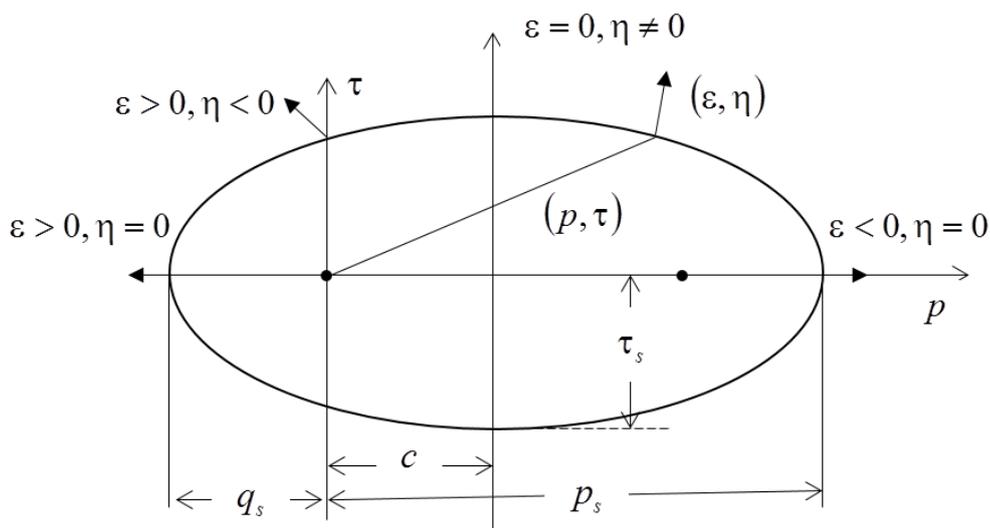


Рис. 3.9. Графическое представление условия пластичности

На рис. 3.9 стрелками обозначен вектор течения (ε, η) в разных точках эллиптического условия пластичности.

Поверхности нагружения в пространстве напряжений в общем случае будут представлять собой незамкнутые поверхности.

Уплотнение песка происходит за счет переупаковки частиц, что возможно за счет сдвигающих макронапряжений. Поверхность текучести для песка не замкнута со стороны отрицательных значений среднего напряжения. Например, условие Мизеса-Шлейхера представляет собой в пространстве напряжений конус с осью, совпадающий с гидростатической

осью, и с вершиной, лежащей на оси и расширяющейся в направлении отрицательных значений среднего напряжения [28].

Условие предельного равновесия Кулона для песка имеет вид [28, 29]:

$$\max \tau_n = k + \sigma_n \operatorname{tg} \omega, \quad (3.29)$$

где τ_n, σ_n – соответственно, сдвиговые и нормальные напряжения на поверхности скольжения, k – сцепление, $\operatorname{tg} \omega$ – коэффициент внутреннего трения.

Нормальные сжимающие усилия в песке полагаются положительными. В пространстве главных напряжений условие Кулона (3.29) представляет собой шестигранную пирамиду, которая при $\omega = 0$ переходит в условие Треска.

Дилатансия определяется, согласно [28], формулой

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \sin \omega, \quad (3.30)$$

а диссипация D вычисляется по формуле

$$D = k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \cos \omega. \quad (3.31)$$

Условие неразрывности в этом случае имеет такой вид:

$$\frac{d(\ln \rho)}{dt} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \sin \omega. \quad (3.32)$$

Условие неотрицательности диссипации $D \geq 0$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \geq 0. \quad (3.33)$$

Из уравнений (3.32), (3.33) следует, что в континуальном приближении в области предельного равновесия плотность песка убывает. Таким образом, возникает инверсия плотности и конвекция материала в соответствии с тем же уравнением неразрывности (3.32), записанным вдоль траекторий перемещения частиц [28]:

$$\frac{d(\ln \rho)}{dl} = -\frac{v_{i,i}}{v}, \quad v = (v_i v_i)^{1/2}. \quad (3.34)$$

Распределение плотности ρ вдоль линий переноса материала имеет следующий вид:

$$\rho = \rho_0 + \exp \int_{M_0}^M \frac{v_{i,i}}{v} dl, \quad \cos \alpha_i = dx_i / dl. \quad (3.35)$$

Считая материал изотропным, получаем, что скорости сдвига, ортогональные поверхности несжимаемости $\varepsilon = 0$, равны нулю (отсутствуют). Это условие выполняется, если вектор скорости \bar{v} лежит в плоскости $\varepsilon = 0$ в пространстве главных скоростей деформации ε_i ($i = 1, 2, 3$). Если α, β -линии скольжения располагаются в этой плоскости, то линию, ортогональную к ним, обозначим цифрой 3.

Таким образом, потеря устойчивости песчаного континуума реализуется в виде образования полос Людерса или дилатансии. Эти явления имеют характер бифуркаций и могут рассматриваться в рамках теории катастроф [11, 31].

Очевидно, что древние египтяне, строители второй пирамиды Снофру, столкнулись с этим явлением, когда сменили технологию строительства пирамид из глиняного кирпича на технологию строительства из блоков естественного известняка. Скорее всего при достижении пирамидой высоты 57 метров произошла дилатансия песка, что было воспринято как предвестник катастрофы, обусловленной весом пирамиды, бо́льшим предельного, и строители приняли решение уменьшить ее вес, уменьшив угол наклона граней, и, кроме того, уложив по периметру дополнительные блоки. Такими решениями удалось восстановить равновесие и закончить строительство пирамиды. Но она по форме отличалась от первоначальной желаемой.

Заметим, что известная пизанская башня, которая потеряла устойчивость и погрузилась в грунт, также была достроена и также ее конечный вид отличается от запроектированного.

Рассмотрим теперь особенности внутренней структуры ломаной пирамиды и их возможное влияние на ход строительства.

Как известно, внутренняя геометрия пирамид была довольно сложной и содержала как минимум погребальную камеру и ведущий к ней коридор от входа на северной грани пирамиды. В пирамиде Снофру традиционная схема была реализована в первой ступени, но затем по какой-то причине была создана еще одна камера в верхней части пирамиды и коридор с выходом на западную грань. Затем был пробит тоннель, соединивший обе камеры. Внутренние пустоты в пирамиде также представляют собой инверсии плотности и связанные с ними неустойчивости элементов пирамиды. С точки зрения теории устойчивости неумение египтян строить устойчивые своды в камерах и коридорах могло быть причиной корректировок, которые вносили египтяне в ходе строительства ломаной пирамиды.

Особенность внутренних помещений пирамид была обусловлена тем, что древние египтяне не умели строить своды, сводчатые потолки, поэтому потолок был либо плоским, образованным блоком перекрытия, либо использовалась консольная технология такая, что потолок представлял собой в сечении угол. Угловые стыки являлись источниками концентрации напряжений. В пирамиде Снофру камера и коридор с северным выходом, возможно, начали терять устойчивость (например, изменились

геометрические формы и размеры), вероятно проявились разрушения в виде межблочных и внутриблочных трещин, и, возможно, междублочные сдвиги типа пластических. Скорее всего на остановку строительства пирамиды и изменение угла наклона граней повлияла какая-либо из вышеуказанных причин, а возможно все вместе. Пирамида начала терять устойчивость, погружаясь в песок, что привело к внутренней потере устойчивости помещений и, возможно, к началу их разрушения. Именно это заставило египтян на втором этапе строительства построить в верхней части пирамиды новую погребальную камеру и коридор с выходом на западную грань для снижения веса, чего не было ни до, ни после.

Как известно, древние египетские строители не умели строить сводные потолки коридоров и погребальных камер внутри пирамид. Блоки свода строили по типу консолей так, что каждый верхний блок выступал над нижним. Поскольку до ломаной пирамиды в качестве строительного материала использовались глиняные и известковые кирпичи, то по отработанной технологии своды коридоров и камер были устойчивы. Однако переход к новой блочной технологии оказался неудачным, своды растрескивались, ползли и таким образом, потребовалась корректировка первоначального проекта. Логично сделать вывод о том, что строительство пирамид было основано на эмпирическом методе, основу которого составляет личный профессиональный опыт, который в те времена передавался от строителей одного поколения строителям другого поколения. Часто это был семейный опыт. Такой метод мог быть утрачен, как, например, секрет дамасской стали. Кстати, такая же проблема затронута в фильме А. Тарковского «Андрей Рублев», касающаяся утраты и обретения технологии литья колоколов.

По приказу фараона Снофру была построена третья пирамида опять из блоков с широким основанием, относительно небольшим углом наклона граней и соответствующей высотой – розовая пирамида, которая показала, что блочная технология работает, но является более сложной, вследствие того, что блоки были достаточно индивидуального размера и это создавало проблемы с корректировкой структуры в случае, если «что-то пошло не так». Отметим, что такая ситуация аналогична проблеме обеспечения устойчивости глубокой подземной выработки при образовании в окрестности ее контура блочной структуры, которая значительно осложняет прогнозирование состояния выработки.

В сущности, построение устойчивой и прочной пирамиды представляло собой задачу поиска оптимального решения, требующей своего индивидуального (уникального) решения в каждом новом случае

построения такого грандиозного сооружения. С современной точки зрения можно сказать, что для древних египтян «оптимизационная задача построения пирамиды» должна была решаться методами математического программирования. Цель оптимизации: гробница должна была быть величественной, долговечной, защищенной от грабителей и прочной.

Древние использовали методы решения строительных задач, которые, используя научную терминологию, можно назвать методами эвристического программирования, основанными на догадках, озарениях, сохранении знаний и опыта в памяти, найденных решениях. Эвристическое программирование предшествует математическому и имеет качественный характер. На основе эвристического программирования была построена пирамида Хеопса, как четвертое приближение в реализации пирамидальной концепции, реализуемой на основе блочной технологии. Как известно, его сын фараон Джадефру построил пирамиду, которая по его замыслу должна была превзойти пирамиду отца, быть выше пирамиды Хеопса. Для этого он использовал холм, образованный выходом коренной породы на поверхность в качестве фундамента. С целью повышения защиты от воров камера была изготовлена из гранитных блоков. Однако, уже во времена Древнего Рима гробница оказалась разграбленной и разрушенной, вследствие ее удобного расположения с точки зрения логистики, но, наверное, и хорошего состояния. Другой сын Хуфу фараон Хефрен построил пирамиду недалеко от пирамиды Хеопса, подобную ей, но значительно меньше.

Из всего вышесказанного следует, что древние египтяне обладали определенными знаниями (хотя в большей степени эмпирическими) о проблемах устойчивости, возникающих при строительстве пирамид, и решали их поэтому «методом проб и ошибок». Создав технологию сооружения пирамид из кирпича, египтяне во время правления фараона Скофру решили разработать новую технологию – сооружение пирамид из блоков. Как известно, «первый блин» получился не слишком удачным, но и не катастрофическим. Знание теории катастроф позволило бы египтянам прежде, чем строить такое сооружение, выполнить проектирование и расчеты на прочность и устойчивость конструкции пирамиды.

4. К задаче оптимального проектирования, расчета устойчивости и прочности пирамид

1. Проблема устойчивости сводов в погребальных камерах и коридорах на основе теории катастроф может быть рассмотрена на основе известной задачи о «прощелкивании фермы Мизеса» [32]. Выражение для критической

силы в этом случае имеет вид:

$$P_{кр} = \frac{2H_0^3 EF}{3\sqrt{3}l^3}, \quad (4.1)$$

где H_0 – начальная высота арки в угловой точке, $2l$ – расстояние между опорами (коридора, камеры), E – модуль Юнга.

Критическую силу для свода кругового сечения подземного туннеля, в свою очередь, можно вычислить по формуле [32]:

$$P_{кр} = \frac{3}{2} GH_0^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4, \quad (4.2)$$

При $P = P_{кр}$ происходит потеря формы углового свода «перескоком» в точках D и E (рис. 4.1).

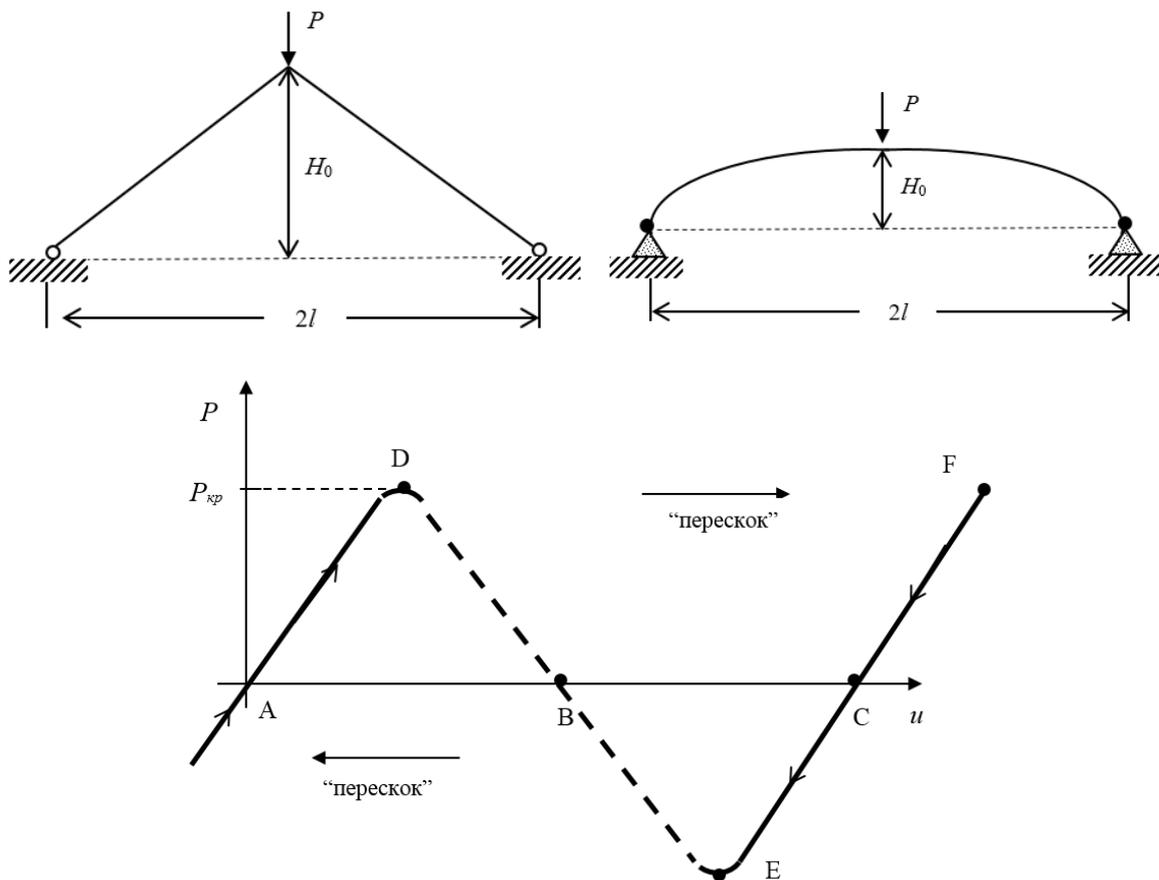


Рис. 4.1. Модельная схема о потере устойчивости свода

Свод неподкрепленного подземного туннеля образован горными породами и со временем практически не обладает упругостью, поэтому обратный перескок не имеет места быть. То же самое верно и для фермы Мизеса. Потеря устойчивости сводом ведет к образованию в вершине свода хрупкого или пластического шарнира (если процесс рассматривается с учетом его необратимости) [10].

Учет несовершенств системы может быть выполнен с использованием

такой формулы [10]:

$$P_{\delta} = P_{kp} - k|\delta_1|^{2/3} - \delta_2, \quad (4.3)$$

где параметр δ_1 учитывает нарушение симметрии за счет неоднородности материала, а δ_2 учитывает нарушение симметрии приложения нагрузки, k – жесткость системы, P_{kp} – сила для идеальной системы.

Учет уменьшения несущей способности свода, вследствие его динамического нагружения, осуществляется по формуле

$$P_{\Delta E} = P_{kp} - 2|\Delta E|^{1/2}. \quad (4.4)$$

Здесь ΔE – кинетическая энергия системы.

Зависимость P от механико-геометрических несовершенств δ_1 и динамического несовершенства (нагрузки) ΔE представлена на рисунке 4.2.

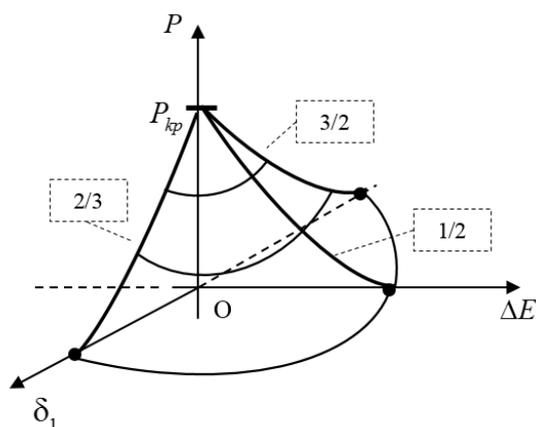


Рис. 4.2. Зависимость P от механико-геометрических несовершенств δ_1 и динамического несовершенства (нагрузки) ΔE

Анализ данного рисунка показывает, что арочная форма кровли сооружения более чувствительна к динамическим воздействиям (динамическим несовершенствам), чем к несовершенствам, нарушающим симметрию конструкции.

Теория катастроф позволяет объяснить зависимость экспериментальных данных о неустойчивости конструкций от числа управляющих параметров. Так, для одного управляющего параметра λ в случае общего положения имеет место только катастрофа складки, для которой локальная потенциальная формула имеет простейший вид [11]. Следующая по сложности функция потенциальной энергии содержит два управляющих параметра и для таких систем дополнительно имеет место катастрофа сборки. Для трех параметров дополнительно может иметь место катастрофа типа «ласточкин хвост» или гиперболические и эллиптические омбилические катастрофы. В случае четырех управляющих

параметров может иметь место любая катастрофа из семи элементарных катастроф, которые были разработаны И.Е. Томом [31] на основе топологической концепции структурной устойчивости.

Знание потенциальной функции позволяет найти критическое равновесное состояние, в котором обращаются в нуль одновременно две первые производные. Изменение управляющего параметра λ (связано с изменением P) соответствует нагружению конструкции до критического состояния потери устойчивости [31]. На рисунке 4.3 изображен учет несовершенств с помощью введения параметра δ . Траектория равновесия идеальной системы совпадает с осью λ ($u=0$). Так, кривая ХСУ загибается в критической точке С, в которой меняется характер устойчивости (на рис. 4.3).

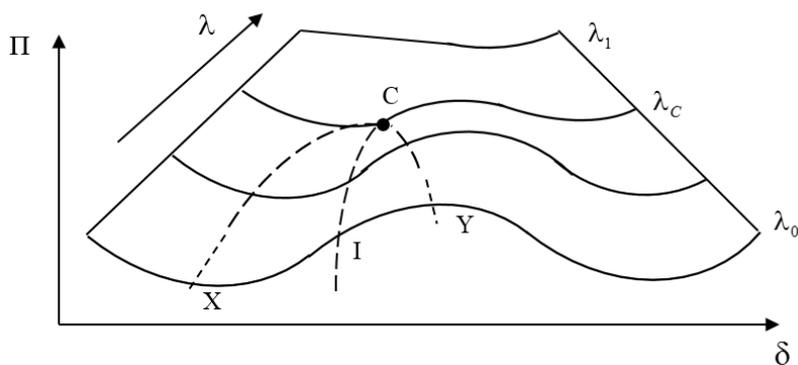


Рис. 4.3. Траектории равновесия системы в зависимости от параметра δ

На рисунке 4.4 справа представлена диаграмма неустойчиво симметричной точки ветвления на плоскости «нагрузка λ – перемещение u ». На данном рисунке слева изображен график чувствительности нагрузки к несовершенствам. Неустойчиво симметричная точка бифуркации, показанная на рисунке 4.4 справа представляет собой пример неустойчивой сборки, которая возможна в случае непологих сводов. Слабая чувствительность к несовершенствам определяется «законом 2/3», согласно формулам (39), установленным экспериментально [11].

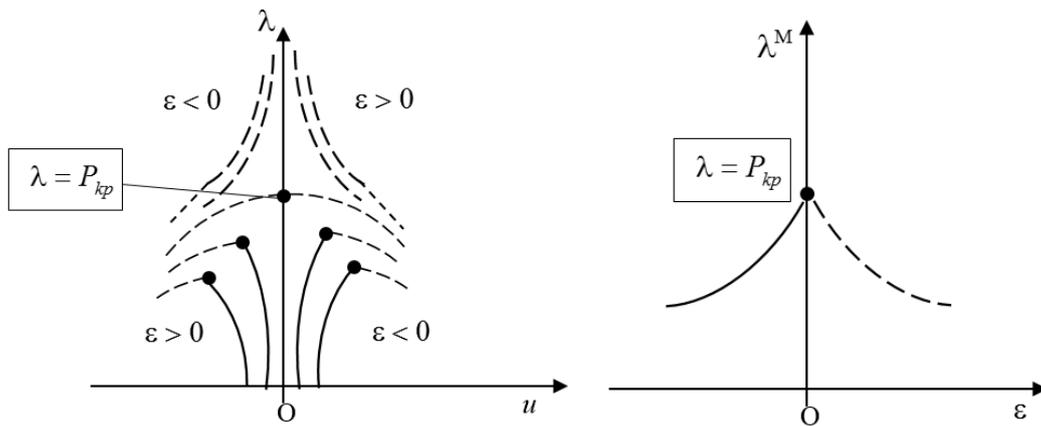


Рис. 4.4. Диаграмма неустойчиво симметричной точки ветвления на плоскости «нагрузка λ – перемещение u »

Конечно, древние египтяне не знали теории катастроф и не могли подозревать, что в будущем будут созданы методы, позволяющие спроектировать всю пирамиду еще до начала строительства, и уже на стадии проектирования предусмотреть учет несовершенств (индивидуальных особенностей) отдельных компонентов, из которых монтируется пирамида, что в итоге позволяет избежать неожиданных катастрофических проявлений в процессе строительства.

Теория катастроф позволяет классифицировать инструментальные средства проектирования и расчета устойчивости конструкций, что дает возможность автоматизировать эти процессы, вплоть до создания систем типа CAD/CAE/CAM.

Для современных систем проектирования строительство пирамид не представляет собой трудную задачу, в то время как задача проектирования подземных сооружений при разработке месторождений полезных ископаемых продолжает оставаться сложной проблемой, решение которой разбивается на большое количество задач.

Из теории сложных систем известно, что чем из большего числа компонентов состоит система, тем меньше ее надежность. В теории устойчивости составных систем также возникает проблема устойчивости сложной системы, особенно при учете несовершенств. Установлено, что объединение двух и более компонентов довольно грубых элементов может иметь в результате объединения систему более чувствительную к несовершенствам, чем каждая из них. Известный принцип равнопрочности компонентов при оптимальном конструировании предполагает использование структурных элементов, разрушающихся одновременно при одной и той же нагрузке. Возвращаясь к ломаной пирамиде, можно

показать, что при решении задачи о предотвращении потери устойчивости, возможно и разрушение сооружения за счет изменения угла наклона граней.

Для простоты рассмотрим задачу в двухмерной постановке. Как уже говорилось, строительство пирамиды представляло собой процесс, состоящий из трех 3 этапов. Первый этап – это сооружение усеченной пирамиды, вес которой достигал предельной величины. Как было показано, это приводило к погружению пирамиды в песок. Если бы египтяне знали математику, механику, то они бы строили равнопрочную пирамиду, у которой грань в сечении была бы не прямой, а кривой. Уравнение такой грани несложно вычислить (см. рис. 4.5) [10].

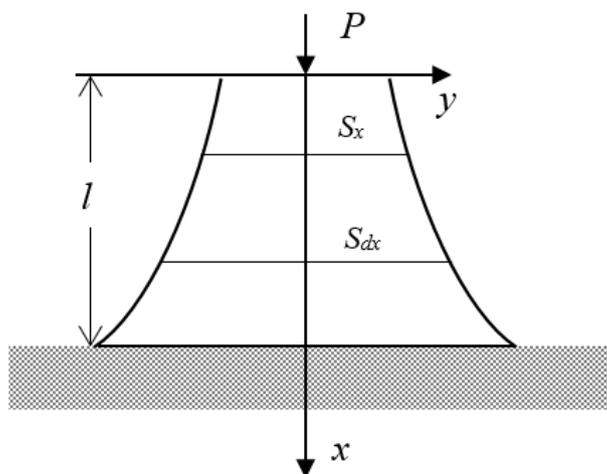


Рис. 4.5. Равнопрочная пирамида

Сечение грани пирамиды, равнопрочной к весу P верхней части пирамиды, имеет экспоненциальный вид так, что площадь поперечного сечения равна [10]:

$$S_x = \frac{P}{\sigma_p} \exp\left(\frac{\rho x}{\sigma_p}\right). \quad (4.5)$$

В формуле (4.5) (см. рис.4.5): l – высота усеченной пирамиды, S_x – площадь поперечного сечения в точке x , S_{dx} – площадь в точке $(x + dx)$, σ_p – предельная нагрузка, ρ – плотность.

Максимальная сила давления в точке $x=l$ вычисляется по формуле

$$P_l = \frac{P}{\sigma_p} \exp\left(\frac{\rho l}{\sigma_p}\right). \quad (4.6)$$

Если учесть наличие камер и коридоров, то сила давления уменьшается, но, вместе с тем, уменьшается и прочность, что усложняет расчеты.

Очевидно, что современное решение проблемы оптимального проектирования, расчета устойчивости и прочности пирамиды вполне

успешно может быть осуществлено методами математического моделирования и математического программирования [33, 34]. Во время Древнего Египта, говоря современным языком, при принятии решений использовали эвристические модели и методы эвристического программирования [35], которые являются предшественниками современных математических методов. Прошло почти две тысячи лет, прежде чем появилась геометрическая модель Евклида, и еще две тысячи, прежде чем появилась механика Ньютона.

5. О достоверности прогноза геомеханических процессов большой интенсивности с динамическим характером проявления

Если изучить всевозможные публикации, касающиеся проблемы предсказания и прогноза разнообразных динамических явлений в массивах горных пород, то логичным представляется постановка вопроса о том, возможно ли в принципе разработать достоверные прогностические методы. К проблеме о принципиальной возможности разработки достоверных прогностических методов и методик прогноза разнообразных динамических явлений в массивах горных пород вследствие техногенной деятельности человека можно в полной мере применить аргументы и положения, сформулированные в работе [36]:

- в настоящее время *высокоточный прогноз невозможен* вследствие хаотической, многовариантной и нелинейной природы процессов подготовки динамических процессов;
- породная толща находится в состоянии самоорганизованной критичности (хаоса), не имеющей характерных размеров, и, следовательно, оценка места, времени и силы динамических явлений может быть только статистической, но не детерминированной;
- динамическим явлениям присуща непредсказуемость, поэтому парадигма, в соответствии с которой данному физическому явлению, реализующему огромную энергию, должны в обязательном порядке предшествовать идентифицируемые и наблюдаемые предвестники, является неверной;
- даже наиболее развитые в настоящее время методы, базирующиеся на физической регистрации предвестников динамических явлений, не могут объяснить даже 50 % всех имеющих место явлений;
- единой физической основы прогноза индивидуального явления не существует.

Данные положения говорят не о невозможности прогноза, а о

сложности и слабой изученности рассматриваемого явления. Поэтому прикладная прогностическая задача должна включать в себя комплексные исследования, рассматривая все возможные механизмы развития физического процесса [37].

Согласно концепции самоорганизованной сейсмичности [38], геологическая среда является открытой динамической самоорганизующей системой, в которой одновременно протекают два процесса: накопление упругой энергии деформирования за счет внутренних (технологических) и внешних источников, а также диссипация (скачкообразное уменьшение) этой энергии путем сдвигов и техногенной сейсмичности. Крупные структурные блоки в этой системе – участки, в которых скорость накопления энергии опережает скорость ее диссипации [39]. *На границе данных энергонасыщенных участков и происходят динамические явления (например, горные удары)*. По времени такие процессы приурочены главным образом к явлениям естественного или техногенного характера большой интенсивности (например, массовым взрывам, обрушениям), которые исполняют роль «спускового крючка». Поэтому представляется весьма важным выявить эти энергонасыщенные зоны для разработки безопасных мероприятий, препятствующих или предотвращающих возникновение катастрофических динамических явлений.

Сделаем некоторые замечания относительно фактора «время» в задачах исследования динамических явлений. В данной проблеме можно выделить задачи *«обобщенного предсказания»*, *«прогноз среднесрочного масштаба времени»* и *«краткосрочный прогноз»*.

Задача «обобщенного предсказания» при всей ее научной значимости не обладает в достаточной степени практической конкретностью. Так, например, утвердительный ответ на вопрос о возможности возникновения в рассматриваемых горно-геологических и горнотехнических условиях динамического явления без указания более точных и конкретных параметров и характеристик не представляет практического интереса.

«Прогноз среднесрочного масштаба времени» имеет своей целью выдачу предупреждения о динамическом явлении за некоторое время, поэтому обладает практической конкретностью. В большинстве своем такой прогноз предполагает моделирование сценария развития процесса разрушения по данным текущих наблюдений. Поэтому актуальной является проблема надежной идентификации возмущений, регистрируемых аппаратурой, так как возмущения являются отражением неопределенностей и флуктуаций различной природы, а не только предвестниками изучаемого

явления.

Исследование краткосрочных предвестников основано на том, что, как известно, заключительная фаза геодинамического события характеризуется резкой активизацией процесса изменения напряженно-деформированного состояния массива. Скорости деформаций во всей области подготовки события возрастают на порядки, поэтому информация относительно надвигающегося разрушения становится более доступна для контроля по комплексу геофизических событий. В этот период процесс в наибольшей степени приобретает свойство необратимости и имеет лавинообразный характер нарастания.

С учетом изложенного, при рассмотрении, например, динамических срывов [40] как физических процессов необходимо исходить из исходного положения, что эти явления представляют собой случайные процессы. Данное утверждение основывается, например, на том, что невозможно иметь полную информацию о состоянии породной толщи, о развитии процессов, обусловивших исходные предпосылки к возникновению этих явлений, и о внешних факторах, способствовавших их реализации. То есть динамические срывы являются следствием чрезвычайно сложных и многообразных исходных детерминированных процессов, происходящих в породной толще и имеющих как естественное, так и техногенное происхождение. Случайный характер динамических срывов определяется лишь ограниченностью знаний о природе всех явлений, предшествующих срывам.

Замечание. Термин «динамические срывы» [40, 41] включает в себя деформационные процессы в породных массивах (в основном в особых зонах), сопровождающиеся смещениями пород больших амплитуд или их разрушением за малый конечный промежуток времени. Динамические срывы необходимо различать по масштабам их проявления (горные удары в отдельных выработках, тектонические удары в границах блочной структуры, крупномасштабные региональные техногенные землетрясения). С точки зрения теории катастроф динамический срыв - это переход состояния среды из неустойчивого в устойчивое, сопровождаемый выделением энергии. Величина энергии обусловлена размерами очага срыва и его энергонасыщенностью. Причем насыщение очага энергией может происходить когда практически отсутствует активная диссипация энергии из очага в окружающую среду.

Проблема выявления надежных признаков наступающего катастрофического события является актуальной задачей в исследовании эволюционно-катастрофического поведения системы. Применительно к

рассматриваемым процессам можно, например, констатировать, что *если математическую модель, описывающую механизм места возможного проявления динамического явления и его тип, можно в принципе построить, то в этом случае установить, произойдет ли такое событие и будет ли оно вообще иметь место, крайне сложно.*

Очевидно, что такой параметр риска возникновения опасного явления, как время существования потенциальной опасности его возникновения (или время уменьшения) неразрывно взаимосвязан с пространственным масштабом зоны распространения предельного (в соответствии с определенными критериями) НДС и, следовательно, с масштабами ожидаемых существенных смещений и деформаций породной толщи.

Так, если речь идет о прогнозировании динамических явлений (горных ударов) в окрестности выработок, при которых происходит разрушение только приконтурной зоны и выбросы отдельных блоков породы в выработанное пространство, то наибольшая опасность будет существовать в течение сравнительно коротких промежутков времени, сравнимых с периодом техногенного вмешательства (проходки выработки). При этом горный удар такого масштаба может быть вызван сравнительно незначительными внешними воздействиями (например, сейсмическое воздействие от удаленных горнопроходческих работ).

В последние годы значительное внимание уделяется сейсмическим методам, способным фиксировать изменения поля упругих колебаний в процессе движений больших участков породной толщи (к таковым относятся, например, обрушение бортов карьеров, формирование оползней, подвижки в районе разломов и др.). Данное обстоятельство обусловлено тем, что *моменту нарушения сплошности среды обычно предшествует снижение скоростей упругих волн* [42]. Это в некоторых случаях объясняется, например, появлением максимальных растягивающих деформаций с наибольшим диапазоном изменения сейсмических характеристик в пределах зон разрушения горного массива. Более того, как указывается в работе [43], многочисленными исследованиями установлен факт того, что *с увеличением амплитуды деформации скорость упругих волн в породной толще всегда уменьшается, а их затухание увеличивается.*

Теоретическое обоснование явлению уменьшения скорости упругих волн в период нарушения сплошности массива выполнено В.А. Дубровским и В.Н. Сергеевым [44]. Установлено, что если система имеет при некотором наборе характеризующих ее критических параметров положение неустойчивого равновесия, разделяющего области значений параметров, соответствующих устойчивому и неустойчивому состоянию системы, то в

устойчивой области при внешнем воздействии будут возникать волны, частота которых должна стремиться к нулю по мере приближения системы к критическому положению неустойчивого равновесия при конечных размерах волновых возмущений. Следовательно, при эволюционном приближении системы к положению неустойчивого равновесия, за которым следует катастрофический переход в другое эволюционное состояние, система должна испытывать собственные колебания понижающейся (практически до нуля) частоты по мере подхода системы к катастрофическому порогу (положению неустойчивого равновесия). Важный вывод, следующий из данного принципа, состоит в том, что [44] *любая катастрофа должна предваряться медленными волновыми изменениями некоторых характеризующих состояние системы параметров. Частота этих собственных волновых движений очага неустойчивости стремится к нулю по мере приближения к порогу неустойчивости – катастрофе.*

Заключение

Неоднородное распределение плотности в пространстве и времени является источником потенциала сил, обуславливающих эволюционное и революционное изменение структур от масштабов Вселенной, галактик, планет до атомных масштабов и меньше. Флуктуации плотности могут являться зародышами, кластерами материи, вокруг которых возникает дальнедействующее поле притяжения. В жидких и твердых телах неоднородность плотности проявляется как механическое свойство, которое называется сжимаемостью, необходимость учета которого важна при создании моделей для построения алгоритмов расчета, позволяющих прогнозировать поведение, состояние естественных и искусственных систем. Понимание законов, действующих в природе, явилось фундаментом для разработки теории и практики создания искусственных объектов, обладающих свойствами оптимальности.

Древнеегипетская цивилизация, оставившая после себя многочисленные свидетельства более, чем двухтысячелетнего развития, дает много конкретного материала для изучения методов решения задач механики без «знания механики». Реальная математическая модель пространства на уровне аксиом Евклида появилась более чем через две тысячи лет после начала строительства пирамид как следствие и потребность в строительстве храмов, одним из наиболее известных из которых в наше время является Акрополь, как величайшее инженерное

достижение греческой цивилизации. Купол Пантеона, созданный по передовой технологии бетонных сооружений, считается выдающимся достижением инженерной мысли цивилизации Древнего Рима.

Можно привести много примеров решения сложных задач оценки прочности и устойчивости при возведении средневековых замков, храмов, дворцов и крепостей. Весь этот период, протяженностью около четырех тысяч лет, можно охарактеризовать как период, где основу для поиска и принятия инженерных решений составляло эвристическое моделирование вместе с эвристическим программированием, базировавшихся на эмпирике. Возникновение математического моделирования и связанного с ним математического программирования явилось закономерным результатом накопления опыта создания все более сложных объектов, которые являются материальными сохранившимися примерами удачных решений.

Математическое моделирование и создание на его основе математического программирования представляет собой парадигму современной науки и, в тоже время, является «набором инструментов» современной инженерии.

Развитие современных научных технологий, начавшихся в эпоху Возрождения, основывалось на создании математического моделирования и самого мощного формального языка: математики, на котором разрабатывались методы математического программирования. Это был скачок (прорыв), который, на языке теории катастроф, можно описать как сборку. За двести с небольшим лет были разработаны и реализованы методы решения различных начально-граничных задач для различных линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями. Невозможность найти точные решения корректно сформулированных математических задач потребовало развития качественных методов исследования дифференциальных уравнений, получивших название теории устойчивости.

Несмотря на усилия множества гениальных ученых, все же общих методов решения нелинейных дифференциальных уравнений, подобно тому, как это было сделано для линейных систем, получить пока не удалось. Качественные методы в процессе их применения позволили получить много полезной информации о поведении нелинейных систем различной природы, в том числе локального поведения решений в окрестности, например, стационарного состояния, важного для многих приложений.

Примеры устойчивости состояния равновесия, рассмотренные в данной работе, показывают, что этот вопрос волновал уже древних египтян, а математическую формулировку задача получила лишь спустя четыре тысячи лет в трудах Эйлера. Качественные методы теории

дифференциальных уравнений, основанные на теории бифуркации Пуанкаре, являются с точки зрения классической математики эвристическими на современном этапе развития нелинейных моделей и их управляющих дифференциальных уравнений.

Таким образом, прогресс методов моделирования идет по спирали. Неустойчивости, обусловленные инверсией плотности, являются одной из областей, где современные методы позволяют решить большое количество задач, возникающих в различных областях науки и инженерии. Теория бифуркаций позволила наглядно описывать и классифицировать перестройки системы в зависимости от параметров, а теория катастроф и отображений – в зависимости от количества параметров.

Современная наука легко решила бы задачи, возникавшие перед древними строителями египетских пирамид, но далеко не всегда эффективно справляется с задачами, возникающими в наше время. Если, рассмотрев три среды, в которых на современном этапе ведется деятельность человека: атмосфера–космос, океан, Земля, то наиболее далеко человек проник в космос, менее глубоко в океан и еще меньше вглубь Земли. Освоение подземного пространства связано с решением сложных сопряженных задач геомеханики, геотехники и геодинамики, обеспечивающих надежность и безопасность функционирования подземных сооружений [45]. При возведении неглубоких подземных объектов (метро, тоннели, инженерные сооружения) достигнут существенный прогресс. Вместе с тем, при разработке месторождений полезных ископаемых глубокого залегания имеется много нерешенных задач, требующих построения адекватных механико-математических моделей. Как известно, в горнодобывающей промышленности один из самых высоких уровней аварийности, связанный с возникновением ситуаций, относящихся с точки зрения механики, к катастрофам: горные удары, динамические сдвиги, вывалы и обрушения, внезапные выбросы – далеко не полный перечень явлений, которые требуют построения математических моделей, наиболее адекватно описывающих процессы, а, что более важно, на основе которых можно прогнозировать механизм развития катастрофических явлений [46]. Решение этой проблемы «минимакса» представляет трудноразрешимую задачу, поскольку процесс масштабного и интенсивного извлечения полезного ископаемого создает инверсию плотности подземного пространства, что создает условия для неустойчивостей разного типа.

Библиография

1. Постон, Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт - М.: Мир, 1980.
2. Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. – М.: Мир, 1984.
3. Германович, Л.Н. О критериях разрушения материалов с дефектами / Л.Н. Германович, Г.П. Черепанов // Прикладная математика и механика. - 1987. - Т.51, вып.2. - С. 330-340
4. Cherepanov, G.P. Mechanics of brittle fracture / G.P. Cherepanov. – N.Y.: McGraw-Hill, 1979.
5. Журавков, М.А. Естественное напряженное состояние породной толщи / М.А. Журавков // Горный журнал. – 1999. – №1–2, С.32–38.
6. Петухов, И.М. Прогноз и контроль состояния горного массива – одна из основ безопасной и эффективной эксплуатации недр / И.М. Петухов // Проблемы горной геомеханики при разработке полезных ископаемых. – Л.: ВНИМИ, 1989. – С.97–103.
7. Zhuravkov, M. Modeling stability ecosystem on the basis of the theory of stability and catastrophes / M. Zhuravkov, S. Andrejko, A. Zemskov // Computer applications and operations research in the mineral industries. APCOM'97. – Moscow: Pub. by Moscow state mining university 1997. – P. 502–506.
8. Рвачев, В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. 551с.
9. Shemyakin, E.I. The rock-mass zone disintegration near deep level mining opening. Part I: Data of in situ observations / E.I. Shemyakin, G.N. Fisenko, M.V. Kurlenja, V.N. Oparin et al. // Journal of Mining Science, 1986, Vol. 22, No. 3. Pp. 3–13.
10. Ключников, В.Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем / В.Д. Ключников. – М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.
11. Томпсон, Дж М.Т. Неустойчивость и катастрофы в науке и технике / Дж М.Т. Томпсон. – М.: Мир, 1985. 254с.
12. Линьков, А.М. Об условиях устойчивости в механике разрушения / А.М. Линьков // ДАН СССР. – 1977. – Т. 233. – № 1.
13. Журавков, М.А. Моделирование и прогноз катастрофических явлений в геомеханике / М.А. Журавков, С.И. Богдан. – Д200219 от 13.02. Реферативный сборник непубликуемых работ БелИСА. Вып. 1 (24). 2002. 67с.
14. Кильчевский, Н.А. Курс теоретической механики / Н.А. Кильчевский. – Т.2. М.: Наука, 1977, 543с.
15. Браут, Р. Фазовые переходы / Р. Браут. – М.: Мир, 1967. 288с.

16. Thorne, K.S. Gravitational Collaps and the Death of a Star / K.S. Thorne // *Science*, 1965, V.150, N.3704. Pp. 1671-1679.
17. Кулак, М.И. Фрактальная механика материалов / М.И. Кулак. – Минск: Вышэйшая школа, 2002. 304 с.
18. Кондратьев, Б.П. Неоднородный шар как модель планет. Внутренние точки максимального притяжения / Б.П. Кондратьев, Н.Т. Трубицина, А.О. Опарин, П.О. Соловьева // *Вестник Удмуртского университета. Сер. мат., мех., комп. науки*, 2013, вып.2. С.74-84.
19. Jeffreys H. The Earth / H. Jeffreys. – New York, Cambridge. 6th ed. U.P., 1967.
20. Snyder, R. *American Journal Physics*. June 1986, V.54, N.6. Pp.517.
21. Снайдер, Р. Двухплотностная модель земного шара / Р. Снайдер // *Физика за рубежом. Серия Б. М.: Мир*, 1988. С.19-23.
22. Ишлинский, А.Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. 701 с.
23. Шемякин, Е.И. Очерки геомеханики горных пород / Е.И. Шемякин // В кн. *Предельное состояние деформированных тел и горных пород*. М.: Физматлит, 2008. 831с.
24. Nepershin, R.J. *Applied Problems of Plasticity* / R.J. Nepershin. – Moscow, Pub. by Stankin, 2016. 310 p.
25. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.:Наука, 1969. 420 с.
26. Ревуженко, А.Ф. Механика сыпучей среды / А.Ф Ревуженко. – Новосибирск: ЗАОИПП «ОФСЕТ», 2003. 373 с.
27. Ревуженко, А.Ф. Механика упругопластических сред и нестандартный анализ / А.Ф Ревуженко. – Новосибирск: изд-во НГУ, 2000. 426 с.
28. Друянов, Б.А. Прикладная теория пластичности пористых тел / Б.А. Друянов. – М.: Машиностроение, 1989. 165 с.
29. Шемякин, Е.И. Вопросы прочности твердых тел и горных пород / Е.И. Шемякин // В кн. *Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород*. – М.: Физматлит, 2006. 863с.
30. Шемякин, Е.И. Очерки геомеханики горных пород / Е.И. Шемякин // В кн. *Предельное состояние деформированных тел и горных пород*. – М.: Физматлит, 2008. 831с.
31. Арнольд, В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1990. 128 с.
32. Айталиев, Ш.М. Концепция дезинтеграции и ее реализация при обработке глубоких горизонтов / Ш.М. Айталиев, А.А. Такшинов // *Труды*

межд. Научной конференции «Современные концептуальные положения в механике горных пород». – Бишкек: Илим, 2002 с.

33. Eastman, Chuck; Tiecholz, Paul; Sacks, Rafael; Liston, Kathleen. BIM Handbook: A Guide to Building Information Modeling for Owners, Managers, Designers, Engineers and Contractors (2nd ed.). – Hoboken, New Jersey: John Wiley. – 2011.

34. Van Nederveen, G.A.; Tolman, F.P. Modelling multiple views on buildings // Automation in Construction. 1 (3): 215–24. – 1992.

35. Головки, В.А. Нейросетевые технологии обработки данных: учеб. пособие / В.А. Головки В.А., В.В. Краснопрошин – Минск: БГУ, 2017. – 263 с.

36. Моргунов, В.А. Реальности прогноза землетрясений / В.А. Моргунов // Физика Земли. – 1999. – № 1. – С. 79-91.

37. Журавков, М.А. Техногенные динамические события в регионах крупномасштабного освоения подземного пространства. Часть 3. Мониторинг техногенных динамических событий / М.А. Журавков // Горная механика и машиностроение. – №3. – 2014. – С.5 – 23.

38. Козырев, А.А. Особенности прогноза и профилактики мощных динамических явлений в природно-технических системах / А.А. Козырев [и др.] // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: сб. тр. конф. / ИГД СО РАН. – Новосибирск, 2001.

39. Линдин, Г.Л. Особенности сейсмоактивности Таштагольского месторождения перед горными ударами / Г.Л. Линдин, Т.В. Лобанова // ФТПРПИ. – 2012. – № 2. – С. 70-79.

40. Журавков, М.А. Динамические срывы по структурным нарушениям в условиях блочно-слоистого массива горных пород. Проблемы, гипотезы, модели / М.А. Журавков, С.С. Андрейко // Материалы, технологии, инструменты. – №2. – 1997. – С.76-87

41. Журавков, М.А. Геомеханический мониторинг горных массивов / М.А. Журавков, О.В. Стагурова, М.А. Ковалева. – Мн.: Юникап, 2002. – 252 с.

42. Опарин, В.Н. К проблеме информационного обеспечения мониторинга геодинамических процессов в условиях интенсивного недропользования в Кузнецком бассейне / В.Н. Опарин, В.П. Потапов, А.С. Танайно // ФТПРПИ. – 2006. – № 5. – С. 40-66.

43. Машинский, Э.И. Аномалии затухания амплитуды акустических волн малой интенсивности в горных породах / Э.И. Машинский // ФТПРПИ. – 2008. – № 4. – С. 24-31

44. Дубровский, В.А. Универсальный предвестник геомеханических

катастроф / В.А. Дубровский, В.Н. Сергеев // ДАН, 2004. – Т. 395, № 4. – С. 479-481

45. Журавков, М.А. Актуальные фундаментальные и прикладные задачи геомеханики месторождений калийных солей Беларуси / М.А. Журавков // Научно-техническое обеспечение горного производства: Труды Института горного дела им. Д.А. Кунаева. Том 89 / под общей редакцией Н.С. Буктукова. – Алматы, 2019. Т.89 – С.21 – 29.

46. Журавков, М.А. Техногенные динамические события в регионах крупномасштабного освоения подземного пространства. Часть 1. Возможно ли техногенное динамическое событие большой интенсивности как следствие крупномасштабного освоения подземного пространства? / М.А. Журавков // Горная механика и машиностроение. – №1. – 2014. – С.5 – 24.

Оглавление

Введение	3
1. О применении теории катастроф в геотехнике и геомеханике	5
2. Теория устойчивости в геомеханике	11
3. О проблеме инверсии плотности материи	16
4. К задаче оптимального проектирования, расчета устойчивости и прочности пирамид	33
5. О достоверности прогноза геомеханических процессов большой интенсивности с динамическим характером проявления	39
Заключение	43
Библиография	46