6. *Ченцов А.Г.* Некоторые вопросы теории дифференциальных игр с фазовыми ограничениями // Изв. ИМИ УдГУ. 2020. Т. 56. С. 138–184.
7. *Чистяков С.В.* К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
8. *Ухоботов В.И.* Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–364.

О ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-АФФИННЫХ ФУНКЦИЙ

Г.С. Шульга

Академический лицей ФТШ им. Ж.И. Алфёрова, Санкт-Петербург, Россия
gdextrous@gmail.com

1. Введение. В данной работе исследуется задача глобальной оптимизации кусочно-аффинных функций, т.е. задача вида

$$f(x) = \max_{i\in 1:s}(x^T a_i - b_i) + \min_{j\in 1:p}(x^T u_j - v_j) \longrightarrow \inf, \qquad (1)$$

где x, a_i, $u_i \in \mathbb{R}^n$, b_i, $v_i \in \mathbb{R}$.

Воспользуемся некоторыми сведениями из теории конструктивного негладкого анализа (см., например, [1]).

Определение 1. *Функция g называется кодифференцируемой, если для любой точки z из её области определения найдётся пара выпуклых компактов $\underline{d}g(z)$, $\overline{d}g(z)$ таких, что справедливо разложение:*

$$g(z+\Delta) = g(z) + \max_{[a,v]\in \underline{d}g(z)}(a + \Delta^T v) + \min_{[b,w]\in \overline{d}g(z)}(b + \Delta^T w) + o\left(||\Delta||, z\right).$$

Множества $\underline{d}g(z)$, $\overline{d}g(z)$ называются гиподифференциалом и гипердифференциалом функции g в точке z соответственно, а пара множеств $Dg(z) \triangleq [\underline{d}g(z), \overline{d}g(z)]$ — кодифференциалом функции g в точке z.

Очевидно, что кодифференциал функции g в точке z определяется не единственным образом. В случае, если $Dg(z)$ обеспечивает кодифференциальное разложение без члена $o\left(||\Delta||, z\right)$, он называется глобальным кодифференциалом (см. [2]), а функция g — глобально кодифференцируемой в точке z.

Для любой кодифференцируемой функции справедлива следующие утверждение.

Теорема 1. *Пусть точка z^* является точкой локального минимума функции g, а $Dg(z^*) = [\underline{d}g(z^*), \overline{d}g(z^*)]$ — произвольный кодифференциал функции g в точке z^*. Тогда*

$$(0, \mathbb{O}) \in \underline{d}g(z^*) + \{(0, w)\} \quad \forall (0, w) \in \overline{d}g(z^*).$$

Заметим, что исследуемая функция f (см. (1)) является кодифференцируемой, и более того, глобально кодифференцируемой. Выпишем явный вид глобального гиподифференциала $\underline{d}^* g(z)$ и гипердифференциала $\overline{d}^* g(z)$:

$$\underline{d}^* g(z) = \operatorname*{conv}_{k \in 1:s} \left\{ \begin{pmatrix} x^T a_k - b_k - \max\limits_{i \in 1:s}(x^T a_i - b_i) \\ a_k \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{d}^* g(z) = \operatorname*{conv}_{\ell \in 1:p} \left\{ \begin{pmatrix} x^T u_\ell - v_\ell - \min\limits_{j \in 1:p}(x^T u_j - v_j) \\ u_\ell \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Основные результаты. Теорема 1, устанавливающая необходимое условие локального оптимума, может быть использована для поиска точек глобального оптимума лишь в случае выпуклости функции f. Данное обстоятельство было использовано в [3]. Однако, в рассматриваемой задаче про выпуклость функции f ничего не известно, а значит необходимо предложить отдельный критерий глобального оптимума в терминах кодифференциального исчисления. Это можно сделать только в том случае, когда функция является глобально кодифференцируемой. В данной работе формулируется и доказывается следующая теорема:

Теорема 2. *Точка z^* является точкой нестрогого глобального минимума глобально кодифференцируемой функции g тогда и только тогда, когда*

$$\forall y \in -\overline{d}^* g(z) \quad \exists\, \ell \geqslant 0 : \; y \in \underline{d}^* g(z) - \begin{pmatrix} \ell \\ \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Применяя этот критерий непосредственно к f, можно показать, что исходная кусочно-аффинная функция достигает на $\mathbb{R}^n$ своего минимального значения только в том случае, если

$$\operatorname*{conv}_{j \in 1:p}\{-u_j\} \subset \operatorname*{conv}_{i \in 1:s}\{a_i\},$$

а само оптимальное значение f^* определяется из решения следующей минимаксной задачи со связанными ограничениями:

$$\begin{cases} \max\limits_{\mu}(-b\mu - v\nu) \longrightarrow \inf\limits_{\nu\in\Lambda_p}, \\ A\mu + U\nu = \mathbb{O}_n, \\ \mu \in \Lambda_s. \end{cases}$$

Здесь $A = (a_1 \dots a_s)$ и $U = (u_1 \dots u_p)$ — матрицы, Λ_s — стандартный симплекс в $\mathbb{R}^s$. С помощью теории двойственности в линейном программировании, в данной работе эта задача сводится к классической задаче билинейного программирования с несвязанными ограничениями, для которой уже известны методы как локального, так и глобального поиска. В частности, решению подобных вопросов посвящены публикации [5, 6].

Нахождение решений x^* исходной задачи, т.е. решений уравнения $f(x) = f^*$ можно переформулировать в виде «модифицированной» задачи о разделяющей гиперплоскости. В начале определим вспомогательные множества:

$$\Omega \triangleq \left\{ \left(\begin{smallmatrix} -b_i \\ a_i \end{smallmatrix} \right) \middle| i \in 1:s \right\}, \qquad H \triangleq \left\{ \begin{pmatrix} f^*+v_j \\ -u_j \end{pmatrix} \middle| j \in 1:p \right\},$$
$$S_+ \triangleq \left\{ q = \left(\begin{smallmatrix} q_x \\ q_0 \end{smallmatrix} \right) \middle| q \in \mathbb{R}^{n+1}, q_x > 0, \|q\| = 1 \right\}.$$

Так, необходимо найти такое направление $g \in S_+$, что

$$\exists h \in H : \quad \omega^T g \leqslant h^T g \quad \forall \omega \in \Omega.$$

С помощью методов, аналогичных указанным в [7], это также сводится к задаче билинейного программирования. Показывается, что всё множество решений соответствующей задачи билинейного программирования определяет всё множество решений исходной задачи.

Библиографические ссылки

1. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990, 432 с.
2. *Долгополик М.В.* Метод кодифференциального спуска для кусочно-аффинных функций // Семинар «CNSA&NDO». Избранные доклады. 16 мая 2019 г.
3. *Тамасян Г.Ш., Шульга Г.С., Удот М.В.* О задаче минимизации суммы модулей аффинных функций // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 471—475.
4. *Демьянов В.Ф., Малозёмов В.Н.* Введение в минимакс. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972 г. 368 с.
5. *Стрекаловсий А.С., Орлов А.В.* Биматричные игры и билинейное программирование. М.: Физматлит, 2007. 224 с.

6. *Орлов А.В.* Численное решение задач билинейного программирования, Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. № 2. С. 237–254.
7. *Малозёмов В.Н., Чернэуцану Е.К.* Наилучшее линейное отделение двух множеств. Избранные лекции по экстремальным задачам. Ч. 1. Под ред. проф. В.Н. Малозёмова. Изд-во ВВМ, 2017. 470 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. Ыскак

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
istima92@mail.ru

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \tag{1}$$

где A — матрица размера $n\times n$, $B(s)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывными элементами при $s\in[0,\tau]$, $\tau>0$ — параметр запаздывания.

Рассмотрим для системы (1) следующую начальную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + \displaystyle\int\limits_{t-\tau}^{t} B(t-s)y(s)ds, \quad t>0, \\ y(s)=\varphi(s), \quad s\in[-\tau,0], \quad y(+0)=\varphi(0), \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi(s)\in C([-\tau,0])$ — заданная вектор-функция.

Основной целью данной работы является исследование экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1) и получение оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности.

При исследовании устойчивости нулевого решения системы (1) используется функционал Ляпунова – Красовского, построенный на основе функционалов из [1, 2]:

$$v(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_0^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s,\eta)y(s), y(s)\rangle\, ds d\eta.$$