3. *Асеев С.М., Смирнов А.И.* Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального прохождения через заданную область // Доклады Академии наук. 2004. Т. 395. № 5. С. 583–585.
4. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия оптимальности, М.: Наука 1982.

ЭВОЛЬВЕНТА КРУГА И ТРЕХМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ МАШИНЫ ДУБИНСА

В.С. Пацко, А.А. Федотов

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия
patsko@imm.uran.ru

Под машиной Дубинса [1] понимаем управляемую систему на плоскости x, y:

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u, \qquad |u| \leq 1. \tag{1}$$

Движение системы происходит с постоянной линейной скоростью 1. Угол $\varphi \in (-\infty, \infty)$ задает направление вектора скорости и изменяется в силу скалярного управления $u(t)$. Угол отсчитывается от оси x против часовой стрелки.

Множеством достижимости $G(t_f)$ называем совокупность всех фазовых состояний, в каждое из которых систему (1) можно перевести в момент t_f при помощи некоторого кусочно-постоянного управления $u(t)$, удовлетворяющего ограничению $|u(t)| \leq 1$. Начальное состояние в момент $t_0 = 0$ без ограничения общности считаем нулевым.

В случае, когда множество достижимости рассматривается в геометрических координатах (проекция трехмерного множества $G(t_f)$ на плоскость x, y), его структура хорошо известна и описана в [2]. Здесь граница множества достижимости составляется при помощи четырех кривых, две из которых – эвольвенты круга, а две другие – кардиоиды.

Для трехмерного множества достижимости в работе [3] были выделены шесть типов управлений с двумя переключениями, которыми можно ограничиться при построении границы $G(t_f)$. Настоящая работа посвящена аналитическому описанию сечений множества $G(t_f)$ по угловой координате (φ-сечений). В частном случае, когда $t_f \leq 2\pi$, такое описание сделано в [4].

В общем случае граница двумерного φ-сечения составляется из дуг четырех кривых, каждая из которых порождается одним из шести типов управлений с двумя переключениями. Перечислим для $\varphi > 0$ используемые типы управлений: 1) $+1, 0, +1$; 2) $-1, 0, +1$; 3) $+1, 0, -1$;

6) $-1, +1, -1$. Установлено, что кривые A1 и A6, соответствующие первому и шестому типу, являются дугами окружностей. Неожиданным для авторов оказалось то, что две другие кривые A2 и A3 являются участками эвольвент круга. Радиусы соответствующих кругов, на основе которых строятся эвольвенты, одинаковы и не зависят от t_f и φ. Однако центры кругов зависят от φ. Длина "нерастяжимой нити", при помощи которой образуется эвольвента, равна $t_f - \varphi$.

В докладе будут показаны демонстрационные материалы (в том числе, видео), поясняющие структуру границы трехмерного множества достижимости с изменением момента t_f. Значительное внимание будет уделено случаям неодносвязности множества достижимости и его φ-сечений.

На рис. 1 показан пример φ-сечения множества достижимости $G(t_f)$. При небольшом дальнейшем увеличении t_f происходит касание, а затем и пересечение кривых (эвольвент) A2 и A3. Получаемое φ-сечение при фиксированном $\varphi = \pi/5$ на небольшом промежутке значений t_f становится неодносвязным.

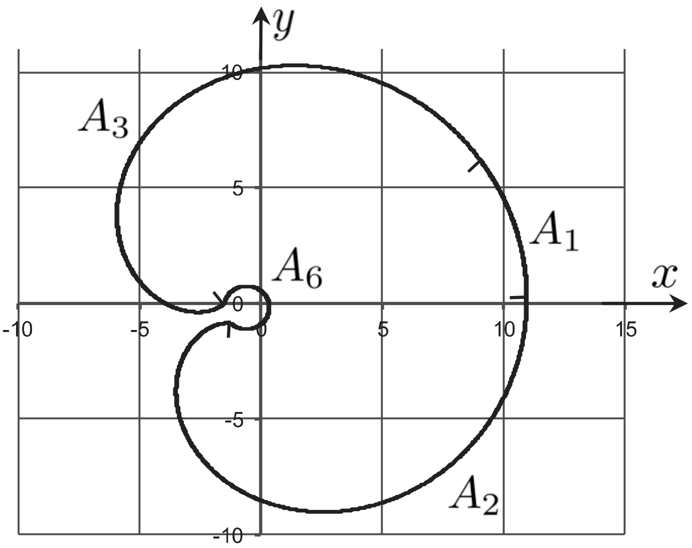

Рис. 1 — Сечение множества достижимости $G(t_f)$ по φ для значений $\varphi = \pi/5$ и $t_f = 7\pi/2$

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском Математическом Центре.

Библиографические ссылки

1. *Laumond J.-P. (ed.)* Robot motion planning and control. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 354 p. (Lecture Notes in Control and Information Sciences. Vol. 229).

2. *Cockayne E.J., Hall G.W.C.* Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM Journal on Control and Optimization. 1975. Vol. 13. No. 1. P. 197–220.
3. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
4. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Труды института математики и механики. 2020. Том 26. № 1. С. 182–197.

МОДЕЛИ РЕЖИМОВ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ДЛЯ ПОПУЛЯЦИЙ С НЕКОНТРОЛИРУЕМОЙ РЕПРОДУКТИВНОЙ АКТИВНОСТЬЮ

А.Ю. Переварюха

Санкт–Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН,
Санкт–Петербург, Россия
temp_elf@mail.com

Введение. Во время активных инвазионных процессов распространения чужеродных биологических видов в новой для них биотической среде часто наблюдаются чрезвычайно стремительные изменения численности. Формы таких экстремальных переходных популяционных процессов чрезвычайно разнообразны. Виды при попадании в разные экосистемы демонстрируют несхожие режимы динамики. Инвазионные явление нельзя описать обобщенной популяционной моделью. Классификация форм динамики популяций видов-вселенцев является отдельной проблемой. Можно выделить несколько типов популяционного процесса с переходом к фазе взрывообразного размножения. Вспышка может быть единичной пороговой $\Lambda-$ образной, серией пилообразных несвязных пиков или негармонических флуктуаций как у бабочки *Choristoneura fumiferana* в Канаде — режим экстремальных колебаний численности агрессивного вида. Репродуктивная активность вселенца перестает эффективно контролироваться средой. Противодействие становится минимальным, и если репродуктивный потенциал высок, запускается разрушительная вспышка. У всех сообществ есть некоторый предел выдерживаемого давления. Моделирование явлений предусматривает варианты завершения для экстремальных сценариев.

1. Модифицированные модели колебаний вида-вселенца. Колебания численности многих видов не зависят от динамики их конкурентов [1]. Автоколебательные режимы наблюдались у лаборатор-