

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

О.Н. Здрок

«02» июля 2021 г.

Регистрационный № УД – 10380/уч.

ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям)

направление специальности:

1-31 03 03-01 Прикладная математика
(научно-производственная деятельность)

2021 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 03-2013 и учебных планов УВО № G31-173/уч., № G31и-190/уч. от 30.05.2013 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Н.Н. Труш, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

РЕЦЕНЗЕНТ:

Н.В. Лапицкая, заведующий кафедрой программного обеспечения информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, кандидат технических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой теории вероятностей и математической статистики
Белорусского государственного университета
(протокол № 11 от 25.05.2021 г.);

Научно-методическим Советом Белорусского государственного университета
(протокол № 7 от 30.06.2021 г.)

Заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики

 А.Ю. Харин

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Дисциплина «Временные ряды» вначале знакомит студентов с некоторыми понятиями о случайных распределениях и временных рядах. Далее приводятся основные характеристики многомерных случайных процессов, определяются стационарные случайные процессы и их характеристики. Исследуется семиинвариантный подход к анализу предельных распределений временных рядов. Определяются и изучаются статистические свойства оценок математического ожидания, ковариационной функции, спектральной плотности стационарных случайных процессов. В курсе также затрагиваются вопросы статистического анализа процессов с нерегулярными наблюдениями, а также стационарных процессов с непрерывным временем.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины заключается в ознакомлении студентов с основными типами случайных процессов и статистическим анализом стационарных случайных процессов.

Задачи дисциплины - научить методике исследования статистического анализа стационарных временных рядов и их практическому использованию.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Временные ряды» относится к **циклу** дисциплин специализаций компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Необходимыми дисциплинами для изучения данной являются: «Теории вероятностей и математической статистики», «Математический анализ». Сведения, излагаемые при изучении дисциплины «Временные ряды», являются полезными для лучшего усвоения студентами дисциплин специализаций «Математические методы анализа данных», «Статистический анализ временных рядов». Изучение дисциплины будет полезно студентам при написании курсовых и дипломных работ, а также магистерских диссертаций.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Временные ряды» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

Академические компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Иметь лингвистические навыки (устная и письменная коммуникация).

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

социально-личностные компетенции:

СЛК-1. Обладать качествами гражданственности.

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-4. Владеть навыками здорового образа жизни.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике (критическое мышление).

СЛК-6. Уметь работать в команде.

профессиональные компетенции:

ПК-19. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей.

ПК-23. Владеть современными средствами телекоммуникаций.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- определения рассматриваемых случайных процессов;
- определения основных характеристик стационарных случайных процессов;
- методы построения оценок характеристик стационарных случайных процессов;
- статистические свойства рассматриваемых оценок;

уметь:

- находить конечномерные распределения случайных процессов;
- вычислять математическое ожидание, ковариационную функцию и спектральную плотность конкретных случайных процессов;
- находить оценки основных характеристик стационарных случайных процессов и исследовать их свойства;

владеть:

- основными методами моделирования вероятностных распределений и процессов;
- статистическими пакетами программ.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Временные ряды» отведено:

- для очной формы получения высшего образования – 54 часа, в том числе 34 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел I. Случайные величины и временные ряды

Тема 1.1. Некоторые сведения о случайных распределениях и процессах. Случайные величины, их функции распределения, характеристические функции, числовые характеристики и семиинварианты. Определение случайных процессов и их основных характеристик. Статистический анализ временных рядов.

Раздел II. Многомерные случайные процессы

Тема 2.1. Основные характеристики многомерных случайных процессов. Конечномерные распределения. Смешанные моменты, семиинварианты высших порядков и связывающие их соотношения. Семиинвариантные спектральные плотности высших порядков. Ковариационная функция и спектральная плотность. Комплекснозначные случайные процессы.

Тема 2.2 Стационарные случайные процессы и их основные характеристики. Определение стационарных случайных процессов в узком и широком смысле. Ковариационные функции, спектральные плотности и связывающие их соотношения. Смешанные моменты, семиинварианты и семиинвариантные спектральные плотности высших порядков.

Тема 2.3. О семиинвариантах высших порядков случайных процессов. Представление кумулянтов высших порядков. Свойства семиинвариантов. Кумулянты и семиинвариантные спектральные плотности высших порядков гауссовских случайных процессов.

Тема 2.4. Семиинвариантный подход к анализу предельных распределений случайных процессов. Определение гауссовского случайного вектора через характеристическую функцию. Распределение χ^2 . Комплексный нормальный случайный вектор. Распределение Уишарта. Сходимость моментов и семиинвариантов высших порядков случайных векторов. Гауссовские действительные и комплексные случайные процессы. Асимптотические распределения последовательностей случайных процессов.

Раздел III. Оценки математического ожидания и ковариационной функции стационарных временных рядов

Тема 3.1. Оценка математического ожидания и ее статистические свойства. Построение оценки математического ожидания. Выражения для ковариации оценки через ковариационную функцию и спектральную плотность. Дисперсия оценки математического ожидания. Определение ядерной функции и сингулярного интеграла. Предельные соотношения для ковариации и дисперсии оценки. Состоятельность в среднеквадратическом смысле оценки математического ожидания. Ядро Фейера и его свойства.

Тема 3.2. Асимптотическое распределение оценки математического ожидания. Определение некоторых условий зависимости и перемешивания

случайных процессов. Теорема о сходимости суммы двух подпоследовательностей. Предельное распределение оценки математического ожидания.

Тема 3.3. Оценка ковариационной функции стационарных случайных процессов. Построение оценки ковариационной функции. Вычисление ковариации построенной оценки через семиинвариантную спектральную плотность четвертого порядка и спектральные плотности. Дисперсия оценки. Асимптотические выражения для ковариации и дисперсии оценки. Состоятельность в среднеквадратическом смысле построенной оценки. Асимптотическое распределение оценки.

Тема 3.4. Исследование оценок математического ожидания и ковариационной функции стационарных процессов с нерегулярными наблюдениями. Детерминированные и случайные нерегулярности в стохастических процессах. Бернуллиевские нерегулярности. Связь между характеристиками процессов (входным и выходным) с нерегулярностями. Построение оценки математического ожидания и ковариационной функции входного процесса по наблюдениям за выходным процессом. Математическое ожидание и дисперсия построенных оценок. Асимптотические выражения для дисперсии оценок и их состоятельность. Предельное распределение оценок.

Раздел IV. Оценка спектральной плотности стационарных случайных процессов

Тема 4.1. Конечное преобразование Фурье и его статистические свойства. Определение конечного преобразования Фурье. Второй момент конечного преобразования Фурье и его асимптотика. Предельное распределение конечного преобразования Фурье.

Тема 4.2. Периодограмма и ее статистические свойства. Определение периодограммы и ее первые два момента. Асимптотика первых двух моментов. Предельное распределение периодограммы.

Раздел V. Состоятельные оценки спектральных плотностей

Тема 5.1. Оценивание смещения статистики спектральной плотности. Построение оценки спектральной плотности путем осреднения периодограммы. Оценка интегралов, в которых подинтегральная функция содержит ядро Фейера. Оценка смещения оценки. Примеры спектральных окон. Асимптотическая несмещенность оценки. Уменьшение смещения оценки спектральной плотности.

Тема 5.2. Свойства некоторых функций встречающихся в анализе временных рядов. Вычисление интеграла от модуля ядра Дирихле. Примеры некоторых равенств. Оценка интегралов от произведения двух ядер Дирихле с разными аргументами. Свойства многомерных ядер Фейера.

Тема 5.3. Состоятельные оценки спектральной плотности. Вычисление дисперсии построенной оценки спектральной плотности. Выделение главных компонент в выражении для дисперсии. Доказательство состоятельности оценки.

Тема 5.4. Асимптотическое распределение оценки спектральной плотности. Предельное распределение конечного преобразования Фурье, его действительной и мнимой частей. Асимптотическое распределение периодограмм. Предельное распределение оценки спектральной плотности.

Раздел VI. Стационарные процессы с непрерывным временем

Тема 6.1. Статистический анализ стационарных случайных процессов с непрерывным временем. Оценка математического ожидания. Оценка ковариационной функции. Оценка спектральной плотности. Статистические свойства построенных статистик.

Раздел VII. Устойчивые стационарные случайные процессы

Тема 7.1. Статистические свойства устойчивых распределений и процессов. Определение устойчивых распределений, их функций распределения и характеристических функций. Смысл параметров устойчивых распределений. Определение устойчивых стационарных процессов и их спектральных плотностей. Расширенные конечные преобразования Фурье и периодограмма, их первые два момента и асимптотика. Оценки спектральных плотностей. Состоятельность рассматриваемых оценок.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Случайные величины и временные ряды	2						
1.1	Некоторые сведения о случайных распределениях и процессах	2						Устный опрос
2	Многомерные случайные процессы	8						
2.1	Основные характеристики многомерных случайных процессов	2						Устный опрос
2.2	Стационарные случайные процессы и их основные характеристики	2						Устный опрос
2.3	О семиинвариантах высших порядков случайных процессов	2						Устный опрос
2.4	Семиинвариантный подход к анализу предельных распределений случайных процессов	2						Устный опрос
3	Оценки математического ожидания и ковариационной функции стационарных временных рядов	8						
3.1	Оценка математического ожидания и ее статистические свойства	2						Устный опрос
3.2	Асимптотическое распределение оценки математического ожидания	2						Коллоквиум
3.3	Оценка ковариационной функции стационарных случайных процессов	2						Устный опрос

3.4	Исследование оценок математического ожидания и ковариационной функции стационарных процессов с нерегулярными наблюдениями	2						Устный опрос
4	Оценка спектральной плотности стационарных случайных процессов	4						
4.1	Конечное преобразование Фурье и его статистические свойства	2						Устный опрос
4.2	Периодограмма и ее статистические свойства	2						Устный опрос
5	Состоятельные оценки спектральных плотностей	8						
5.1	Оценивание смещения статистики спектральной плотности	2						Устный опрос
5.2	Свойства некоторых функций встречающихся в анализе временных рядов	2						Устный опрос
5.3	Состоятельные оценки спектральной плотности	2						Устный опрос
5.4	Асимптотическое распределение оценки спектральной плотности	2						Устный опрос
6	Стационарные процессы с непрерывным временем	2						
6.1	Статистический анализ стационарных случайных процессов с непрерывным временем	2						Устный опрос
7	Устойчивые стационарные случайные процессы	2						
7.1	Статистические свойства устойчивых распределений и процессов	2						Устный опрос
ИТОГО		34						

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Бокс Ж., Дженкинс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974. – вып. 1. – 406 с., вып. 2. – 197 с.
2. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980. – 536 с.
3. Хеннан Э. Многомерные временные ряды. М.: Мир, 1974. – 576 с.
4. Труш Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Минск: БГУ, 1999. – 218 с.
5. Труш Н.Н., Соболева Т.В. Статистический анализ оценок спектральных плотностей устойчивых случайных процессов. Минск, БГУ, 2008. – 67 с.
6. Цеховая Т.В., Труш Н.Н. Оценки характеристик второго порядка во временной области стационарных процессов. Минск, БГУ, 2020. – 75 с.
7. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М. Фазис, 1998. – Т. 1. – 512 с., Т. 2. – 544 с.
8. Ярушкина Н.Г. Интеллектуальный анализ временных рядов. Учебное пособие. – М.: Форум, 2018. – 160 с.

Перечень дополнительной литературы

9. Золотарев В.М. Устойчивые законы и их применение. М.: Знание, 1984. – 63 с.
10. Труш Н.Н., Мирская Е.И. Случайные процессы. Преобразование Фурье наблюдений. Учебное пособие. Минск: 2000. – 60 с.
11. Труш Н.Н., Марковская Н.В. Статистический анализ оценок высших порядков стационарных случайных процессов. Учебное пособие. Гродно, 2001. – 83 с.
12. Applebaum D. Lectures on Levy Processes, Stochastic Calculus and Financial Applications. – 2005. – 384 p.
13. Чэнь Хайлун, Н.Н. Труш. Статистический анализ параметрических моделей временных рядов с устойчивыми возмущениями. – Минск: РИВШ, 2011. – 97 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Текущий контроль усвоения знаний в течении семестра по дисциплине «Временные ряды» рекомендуется проводить в виде устных опросов и коллоквиума.

Для диагностики компетенций в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы:

1. Устная форма: устные опросы.
2. Устно-письменная форма: коллоквиум, зачет.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Временные ряды» учебным планом предусмотрен зачет.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в итоговую оценку:

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- Устный опрос – 60%;
- Коллоквиум – 40%.

Итоговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и ответа на зачете с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 40 %, оценки на зачете – 60 %.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *метод учебной дискуссии*, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме.

Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

На лекциях по дисциплине «Временные ряды» вначале необходимо дать определение основных распределений, необходимых в дальнейшем, и их свойств, а затем определить случайные процессы и их основные характеристики во временной и частной областях. Далее следует определить основные классы случайных процессов, выделив особо стационарные случайные про-

цессы. Для последних изложить материал, касающийся их статистического анализа. Рассмотреть оценки основных характеристик для стационарных случайных процессов с непрерывным временем и с нерегулярными наблюдениями.

Так как студенты имеют разный уровень подготовки, то по дисциплине рекомендуется проводить регулярные консультации для закрепления сложного материала.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Студенты самостоятельно вычисляют характеристики конкретных временных рядов.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Некоторые сведения о случайных распределениях и процессах.
2. Основные характеристики многомерных случайных процессов.
3. Стационарные случайные процессы и их основные характеристики.
4. О семиинвариантах высших порядков случайных процессов.
5. Семиинвариантный подход к анализу предельных распределений случайных процессов.
6. Оценка математического ожидания и ее статистические свойства.
7. Асимптотическое распределение оценки математического ожидания.
8. Оценка ковариационной функции стационарных случайных процессов.
9. Исследование оценок математического ожидания и ковариационной функции стационарных процессов с нерегулярными наблюдениями.
10. Конечное преобразование Фурье и его статистические свойства.
11. Периодограмма и ее статистические свойства.
12. Оценивание смещения статистики спектральной плотности.
13. Свойства некоторых функций встречающихся в анализе временных рядов.
14. Состоятельные оценки спектральной плотности.
15. Асимптотическое распределение оценки спектральной плотности.
16. Статистический анализ стационарных случайных процессов с непрерывным временем.
17. Статистические свойства устойчивых распределений и процессов.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Теории вероятностей и математическая статистика	Кафедра теории вероятностей и математической статистики	Предложений нет	Изменений не требуется (протокол № 11 от 25.05.2021 г.)
Математические методы анализа данных	Кафедра теории вероятностей и математической статистики	Предложений нет	Изменений не требуется (протокол № 11 от 25.05.2021 г.)
Случайные процессы в обработке изображений	Кафедра теории вероятностей и математической статистики	Предложений нет	Изменений не требуется (протокол № 11 от 25.05.2021 г.)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на _____ / _____ учебный год

№№ ПП	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
Теории вероятностей и математической статистики
(протокол № _____ от _____ 202 ____ г.)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, звание)

(подпись)

А.Ю.Харин
(И.О. Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

(ученая степень, звание)

(подпись)

А.М.Недзведь
(И.О. Фамилия)