

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

О.Н. Здрок

«02» июля 2021 г.

Регистрационный № УД – 10382/уч.

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 05 Актуарная математика

2021 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-31 03 05-2013 и учебных планов УВО № G31-168/уч., № G31и-193/уч. от 30.05.2013 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Н.Н. Труш, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

РЕЦЕНЗЕНТ:

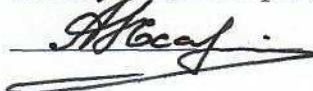
Н.В. Лапицкая, заведующий кафедрой программного обеспечения информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, кандидат технических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой теории вероятностей и математической статистики
Белорусского государственного университета
(протокол № 11 от 25.05.2021 г.);

Научно-методическим Советом Белорусского государственного
университета
(протокол № 7 от 30.06.2021 г.)

Заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики

 А.Ю. Харин

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Случайные процессы в финансовой математике» вначале знакомит студентов с некоторыми свойствами случайных величин, а также финансовыми понятиями, структурами и инструментами. Приводятся примеры случайных величин и процессов в финансовой математике. Дается определение случайных процессов, приводятся примеры, а также вводятся их основные характеристики. Определяются стационарные случайные процессы и их характеристики. Рассматриваются случайные процессы с независимыми приращениями и как примеры определяются процессы Винера, Пуассона, устойчивого движения Леви. Вводятся понятия безгранично делимых и устойчивых случайных величин и процессов. Определяются некоторые негауссовские случайные величины и процессы Леви. Для них приводятся числовые характеристики. Анализируются методы и алгоритмы моделирования случайных величин и процессов. Рассматриваются параметрические модели анализа финансовых временных рядов и их прогнозирования. Исследуются интегралы Лебега-Стилтьеса и Ито от случайных процессов.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины заключается в ознакомлении студентов с методами и алгоритмами теории безгранично делимых, устойчивых случайных величин и процессов Леви, их использовании при решении задач в экономике и финансах.

Задачи дисциплины – научить студентов методике исследования случайных величин и процессов Леви, ее практическому использованию при обработке реальных финансовых данных с применением современных пакетов программ.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Случайные процессы в финансовой математике» относится **к циклу** дисциплин специализаций компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Основой для изучения рассматриваемой дисциплины являются учебные дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», «Математический анализ». Сведения, излагаемые при изучении дисциплины «Случайные процессы в финансовой математике», являются полезными для лучшего усвоения студентами дисциплин государственного компонента «Теория оценивания финансовых активов» и дисциплин специализаций «Статистические методы принятия решений», «Анализ эконометрических моделей». Изучение дисциплины будет полезно студентам

при написании курсовых и дипломных работ.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Случайные процессы в финансовой математике» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

Академические компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

социально-личностные компетенции:

СЛК-1. Обладать качествами гражданственности.

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-4. Владеть навыками здоровьесбережения.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

профессиональные компетенции:

ПК-15. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей.

ПК-18. Пользоваться глобальными информационными ресурсами.

ПК-19. Владеть современными средствами телекоммуникаций.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия финансового рынка;
- определение случайных процессов, стационарных случайных процессов и их основных характеристик;
- определение случайных процессов с независимыми приращениями, процессов Винера, Пуассона, Леви;
- определение безгранично делимых и устойчивых случайных величин и процессов.

уметь:

- находить числовые характеристики рассматриваемых распределений;
- моделировать рассматриваемые распределения и процессы Леви;

- строить оценки характеристик случайных величин и процессов Леви;
- находить моменты рассматриваемых оценок;

владеть:

- основными методами моделирования случайных величин и процессов Леви;
- методами обработки и прогнозирования реальных финансовых данных;
- работой со статистическими пакетами программ.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Случайные процессы в финансовой математике» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 54 часа, в том числе 34 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел I. Случайные величины

Тема 1.1. Некоторые сведения о случайных распределениях. Случайные величины, их функции распределения и числовые характеристики. Характеристическая функция и ее свойства. Кумулянты случайных величин. Классические распределения.

Раздел II. Финансовые понятия, структуры и инструменты

Тема 2.1. Финансовый рынок. Ключевые объекты и структуры финансового рынка. Финансовый рынок. Индивидуумы. Фирмы. Посреднические структуры. Основные финансовые инструменты: банковский счет, облигации, акции. Производные финансовые инструменты. Определение случайных процессов.

Тема 2.2. Представления цен финансовых инструментов. Фильтрованное вероятностное пространство. Мартингальный подход к изучению динамики движения цен. Стохастические последовательности. Мартингалы. Разложение Дуба.

Раздел III. Безгранично делимые и устойчивые распределения

Тема 3.1. Безгранично делимые случайные величины. Свертка функций распределения и сходимость по распределению. Определения безгранично делимых случайных величин, функций распределения, характеристических функций. Примеры и свойства безгранично делимых случайных величин.

Тема 3.2. Безгранично делимые меры. Некоторые вспомогательные результаты. Безгранично делимые случайные вектора и их характеристическая функция. Эрмитовы и условно положительно определенные функции. Безгранично делимые меры. Примеры. Формула Леви-Хинчина. Символ Леви.

Тема 3.3. Устойчивые законы распределения. Определение устойчивых случайных величин и смысл их параметров. Свойства устойчивых распределений. Явное представление устойчивых случайных величин.

Тема 3.4. Компьютерное моделирование случайных величин. Асимптотическое поведение устойчивых случайных величин. Моделирование равномерно распределенных, экспоненциальных, пуассоновских и нормальных случайных величин. Генерирование устойчивых случайных величин. Оценивание некоторых характеристик случайных величин.

Раздел IV. Случайные процессы

Тема 4.1. Определение случайных процессов. Случайные процессы с

дискретным и непрерывным временем. Конечномерные распределения. n -мерные функции распределения и плотности распределения. Свойства n -мерных функций и плотностей распределения.

Тема 4.2. Основные характеристики случайных процессов. Определение математического ожидания, дисперсии, корреляционной и ковариационной функций. Смешанные моменты и смешанные семиинварианты. Характеристики случайных процессов в частной области. Семиинвариантная спектральная плотность n -го порядка.

Тема 4.3. Стационарные случайные процессы. Стационарные случайные процессы в узком и широком смысле, внутренне стационарные процессы. Основные характеристики стационарных случайных процессов во временной и частной областях. Устойчивые стационарные случайные процессы.

Тема 4.4. Случайные процессы с независимыми приращениями. Определения случайных процессов с независимыми приращениями и однородных процессов. Процессы Винера, Пуассона, устойчивого движения Леви, их свойства и моделирование.

Раздел V. Процессы Леви

Тема 5.1. Распределения встречающиеся в финансовой математике.

Распределения: GIG (Generalized Inverse Gaussian), IG (Inverse Gaussian), VG (Variance Gamma), NIG (Normal Inverse Gaussian), CGMY (название по фамилиям Carr, German, Maden, Yor).

Тема 5.2. Случайные величины в финансовой математике. TS (Tempered Stable), Mехner, GH (Generalized Hyperbolic), MTS (Modified Tempered Stable), CTS (Classical Tempered Stable), KR (по фамилиям Kim Rachev).

Тема 5.3. Процессы встречающиеся в финансовой математике. Процессы Леви. Субординаторы. Примеры субординаторов. Процессы основанные на приведенных распределениях.

Тема 5.4. Моделирование случайных величин и процессов Леви. Стандартный метод исключения для моделирования непрерывных случайных величин. Моделирование выше определенных случайных величин. Моделирование процессов Леви.

Тема 5.5. Параметрические модели анализа финансовых данных. Определение моделей ARCH и GARCH. Условия стационарности и эргодичности для рассматриваемых моделей. Оценка параметров моделей с использованием различных процессов Леви. Прогнозирование.

Тема 5.6. Интегралы Лебега-Стилтьеса и Ито случайных процессов. Примеры стохастических интегралов встречающихся на практике и использующих процессы Пуассона, Винера и Леви. Определение случайных мер для интегралов. Приближенное вычисление стохастических интегралов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Дневная форма получения образования с применением электронных средств
обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСП	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Случайные величины	2						
1.1	Некоторые сведения о случайных распределениях	2						Устный опрос
2	Финансовые понятия, структуры и инструменты	4						
2.1	Финансовый рынок	2						Устный опрос
2.2	Представления цен финансовых инструментов	2						Устный опрос
3	Безгранично делимые и устойчивые распределения	8						
3.1	Безгранично делимые случайные величины	2						Устный опрос
3.2	Безгранично делимые меры	2						Устный опрос
3.3	Устойчивые законы распределения	2						Устный опрос
3.4	Компьютерное моделирование случайных величин	2						Устный опрос
4	Случайные процессы	8						
4.1	Определение случайных процессов	2						Устный опрос

4.2	Основные характеристики случайных процессов	2						Коллоквиум
4.3	Стационарные случайные процессы	2						Устный опрос
4.4	Случайные процессы с независимыми приращениями	2						Устный опрос
5	Процессы Леви	12						
5.1	Распределения встречающиеся в финансовой математике	2						Устный опрос
5.2	Случайные величины в финансовой математике	2						Устный опрос
5.3	Процессы встречающиеся в финансовой математике	2						Устный опрос
5.4	Моделирование случайных величин и процессов Леви	2						Устный опрос
5.5	Параметрические модели анализа финансовых данных	2						Устный опрос
5.6	Интегралы Лебега-Стилтьеса и Ито случайных процессов	2						Устный опрос
ИТОГО		34						

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Applebaum D. Levy Processes and Stochastic. – Calculus Combridge University Press, 2004. – 384 с.
2. Труш Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. – Мн. БГУ, 1999. – 218 с.
3. Цеховая Т.В., Труш Н.Н. Оценки характеристик второго порядка во временной области стационарных процессов. Минск, БГУ, 2020. – 75 с.
4. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. – М. Фазис, 1998. Том 1, 512 с, Том 2, 544 с.
5. Schoutens W. Levy Processes in Finance. Pricing Financial Derivatives. – Wiley, 2003. – 170 p.
6. Rachev S.T., Kim Y.S., Bianchi M.L., Fabozzi T.J. Financial Models with Levi Processes and Volatility Clastering. – John Wiley and Sons, 2011. – 394 p.
7. Francq C., Zakoian S. M. GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Application. – 2010. – 504p.
8. Чэнь Хайлун, Труш Н.Н. Статистический анализ параметрических моделей временных рядов с устойчивыми возмущениями. – Минск : РИВШ, 2011. – 98с.
9. Дудник Д.В., Шер М.Л. Основы финансового анализа. – М.: РГУП, 2020. – 232 с.

Перечень дополнительной литературы

10. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. – М.: Мир, 1980. – 536 с.
11. Труш Н.Н., Мирская Е.И. Случайные процессы. Преобразование Фурье наблюдений. – Мн.: 2000. – 60 с.
12. Труш Н.Н., Соболева Т.В. Статистический анализ оценок спектральных плотностей устойчивых случайных процессов. – Минск, БГУ, 2008. – 67 с.
13. Труш Н.Н., Цеховая Т.В. Случайные процессы и их основные характеристики. – Минск: БГУ, 2016.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Текущий контроль усвоения знаний в течении семестра по дисциплине «Случайные процессы в финансовой математике» рекомендуется проводить в виде устных опросов и коллоквиума.

Для диагностики компетенций в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы:

1. Устная форма: устные опросы.
2. Устно-письменная форма: коллоквиум, зачет.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Случайные процессы в финансовой математике» учебным планом предусмотрен зачет.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в итоговую оценку:

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- Устный опрос – 60%;
- Коллоквиум – 40 %.

Итоговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и ответа на зачете с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 40 %, оценки на зачете – 60 %.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *метод учебной дискуссии*, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме.

Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

На лекциях по дисциплине «Случайные процессы в финансовой математике» особое внимание рекомендуется обратить на то, как появляются случайные процессы при исследовании реальных финансовых моделей. Дать определения безгранично делимых и устойчивых случайных величин, процессов и их основных характеристик. Привести определения таких классов случайных процессов как стационарные случайные процессы, случайные

процессы с независимыми приращениями. Далее рассмотреть примеры некоторых процессов Леви, которые встречаются при исследовании финансовых временных рядов. Исследовать вопросы моделирования случайных величин и процессов, параметрические модели с условной гетероскедастичностью, а также интегралы Лебега-Стилтьеса и Ито.

При чтении лекционного курса непосредственно в аудитории необходимо контролировать усвоение материала основной массой студентов путем проведения устных опросов по конкретным темам. Так как студенты имеют разный уровень подготовки, то по дисциплине рекомендуется проводить регулярные консультации для закрепления сложного материала.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Студенты самостоятельно моделируют и оценивают характеристики конкретных распределений возникающих в финансовой математике.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Некоторые сведения о случайных распределениях.
2. Финансовый рынок.
3. Представления цен финансовых инструментов.
4. Безгранично делимые случайные величины.
5. Безгранично делимые меры.
6. Устойчивые законы распределения.
7. Компьютерное моделирование случайных величин.
8. Определение случайных процессов.
9. Основные характеристики случайных процессов.
10. Стационарные случайные процессы.
11. Случайные процессы с независимыми приращениями.
12. Распределения встречающиеся в финансовой математике.
13. Случайные величины в финансовой математике.
14. Процессы встречающиеся в финансовой математике.
15. Моделирование случайных величин и процессов Леви.
16. Параметрические модели анализа финансовых данных.
17. Интегралы Лебега-Стилтьеса и Ито случайных процессов.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Теория вероятностей и математическая статистика	Кафедра теории вероятностей и математической статистики	Предложений нет	Изменений не требуется (протокол № 11 от 25.05.2021 г.)
Теория оценивания финансовых активов	Кафедра теории вероятностей и математической статистики	Предложений нет	Изменений не требуется (протокол № 11 от 25.05.2021 г.)
Анализ эконометрических моделей	Кафедра теории вероятностей и математической статистики	Предложений нет	Изменений не требуется (протокол № 11 от 25.05.2021 г.)
Статистические методы принятия решений	Кафедра теории вероятностей и математической статистики	Предложений нет	Изменений не требуется (протокол № 11 от 25.05.2021 г.)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО
на ____ / ____ учебный год

№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры теории вероятностей и математической статистики

_____ (протокол № ____ от _____ 2021г.)

 (название кафедры)

Заведующий кафедрой

 (ученая степень, ученое звание)

(подпись)

А.Ю. Харин
 (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

 (ученая степень, ученое звание)

(подпись)

А.М. Недзведь
 (И. О. Фамилия)