Определение 3. *Нулевое решение называется ϖ-устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого слабого решения $x(t)$ уравнения, для которого $\|x(0)\| \leq \delta$ п. н., имеем $E(\|x(t)\|^{\varpi}) \leq \varepsilon \ \forall t \geq 0$.*

Определение 4. *Нулевое решение называется глобально асимптотически (ϖ, ϖ_1)-устойчивым, если: а) оно ϖ-устойчиво; б) для любого $K > 0$, для любого слабого решения $x(t)$, для которого $\|x(0)\| \leq K$ п. н., выполняется $\lim\limits_{t\to+\infty} E(\|x(t)\|^{\varpi_1}) = 0$.*

Теорема 1. *Пусть для включения* (1) *выполняется условие* l), *и пусть функция $V(x)$ в этом условии положительно определенная. Тогда нулевое решение включения* (1) *устойчиво по вероятности. Если, кроме того, $V(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$, и множество N_V не содержит ненулевых слабых решений на R, то нулевое решение глобально асимптотически устойчиво по вероятности.*

Теорема 2. *Пусть для включения* (1) *выполняется условие* l), *и функция $V(x)$ в этом условии удовлетворяет неравенствам: $k\|x\|^{\varpi_1} \leq V(x) \ \forall x, \|x\| \geq a$; $k_1\|x\|^{\varpi} \leq V(x) \ \forall x, \|x\| \leq b$, где $\varpi, \varpi_1, k, k_1, a, b$ — положительные постоянные. Если не существует ненулевых слабых решений на R включения* (1), *принадлежащих множеству N_V, то нулевое решение является глобально асимптотически (ϖ, ϖ_1)-устойчивым.*

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАЗГОНА ЛЫЖНИКА НА ПРЯМОЛИНЕЙНОМ СКЛОНЕ

Б.Я. Локшин, В.А. Самсонов

НИИ механики МГУ, Москва, Россия
{blokshin, samson}@imec.msu.ru

Введение. Первым этапом в спортивных соревнованиях по прыжкам с трамплина является разгон лыжника до момента отталкивания. В процессе этого разгона лыжник принимает определенную позу и старается поддерживать ее в процессе спуска при возрастающей скорости за счет вырабатываемых моментов в суставах. Построение модели движения лыжника именно по прямолинейному склону представляет определенный интерес как с практической точки зрения, так и в качестве теоретико-механической задачи. В имеющейся научной литературе лыжника обычно представляют как материальную точку [1 – 3] и рассматриваются некоторые задачи относительно ее движения. Например, в [2, 3] рассматриваются задачи быстродействия по разгону лыжника до некоторой заданной конечной скорости за счет управления лобовым сопротивлением. Для решения этих оптимальных задач используется принцип максимума Понтрягина [2] или метод Миеле [3].

1. Предлагаемая модель. В настоящем сообщении предлагается представить лыжника как систему твердых тел. Одно из них — это корпус, скользящий одной своей точкой по поверхности склона и имеющий возможность совершать поворот относительно нее. Центр масс корпуса находится на некотором расстоянии от точки опоры. В центре масс первого тела размещается другое твердое тело типа крыла, которое имитирует изменяемую форму корпуса. Считается, что все аэродинамическое воздействие сосредоточено именно на этом теле (крыле), для описания этого воздействия используется хорошо зарекомендовавшая себя в ряде других задач квазистатическая модель обтекания [4]. Выбор желаемого режима движения происходит за счет управляющего момента, приложенного в точке контакта корпуса с поверхностью и за счет изменения ориентации (установочного угла) крыла. Решение соответствующих дифференциальных уравнений при заданных зависимостях управляющего момента и установочного угла крыла полностью определяет режим движения в процессе спуска: не только скорость спуска, как это было в предыдущих моделях с материальной точкой, но и угол стойки и наклона корпуса.

2. Спуск с постоянным углом наклона корпуса. Подробно рассмотрен вопрос о движении тела при условии, что в процессе спуска угол наклона корпуса сохраняется. В этом случае оказывается, что направление вектора скорости центра масс тоже не изменяется и совпадает с направлением склона. Постоянство угла наклона корпуса накладывает определенное ограничение на выбор изменяющегося в процессе спуска управляющего момента. Предложен закон изменения управляющего момента в виде обратной связи, обеспечивающий асимптотическую устойчивость выбранного режима спуска. Показано, что существует некоторое постоянное значение установочного угла крыла, при котором достигается максимальное значение скорости спуска в любой момент времени. Тем самым решаются и сформулированные в [2, 3] задачи быстродействия. Отметим, что это экстремальное значение установочного угла не зависит ни от геометрических размеров, ни от площади корпуса и крыла, ни от скорости спуска, ни от выбранного угла наклона корпуса, ни от времени – оно зависит только от аэродинамических характеристик силового воздействия. При этом скорость спуска также не зависит от выбранного угла наклона корпуса. От этого угла зависит только величина управляющего момента.

Таким образом, оптимальный разгон лыжника на прямолинейном участке спуска достигается при некотором фиксированном положении корпуса. Реализация этого режима спуска связана только с возможностями лыжника осуществлять полученный закон изменения управляющего момента.

Библиографические ссылки

1. *Подгаец А.Р., Рудаков Р.Н.* Биомеханические проблемы прыжка на лыжах с трамплина // Russian J. Biomechanics. 2000. Vol. 4. No. 2. P. 1–11.
2. *Remizov L.P.* Optimal running on skis in downhill // J. Biomechanics. 1980. Vol. 13. No. 11. P. 941–945.
3. *Maronski R.* On optimal running downhill on skis // J. Biomechanics. 1990. Vol. 23. No. 5. P. 435–439.
4. *Локшин Б.Я., Самсонов В.А.* Задача о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: изд. МГУ, 2012.

УПРАВЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Е.К. Макаров[1], С.Н. Попова[2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
jcm@im.bas-net.by

[2] Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
udsu.popova.sn@gmail.com

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными матрицами коэффициентов A и B. Через $X(t,s)$, $t,s \geq 0$, обозначим матрицу Коши соответствующей свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Система (1) называется равномерно вполне управляемой [1], если существуют такие положительные числа ϑ и α, что при всех $t \geq 0$, $h \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $h^T W(t, t+\vartheta)h \geqslant \alpha_2 \|h\|^2$, где

$$W(t,s) = \int_t^s X(t,\tau)B(\tau)B^T(\tau)X^T(t,\tau)\,d\tau -$$