

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Н. Здрок

«02» июля 2021 г.

Регистрационный № УД – 10363/уч.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01

Математика (по направлениям)

направление специальности

1-31 03 01-04

Математика (научно-конструкторская деятельность)

2021 г.

Учебная программа составлена на основе типового учебного плана G31-1-001/пр-тип. от 31.03.2021 и учебного плана G31-1-018/уч. от 25.05.2021

СОСТАВИТЕЛЬ:

Метельский Ю.М., доцент кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТ:

Лепин В.В., ученый секретарь государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математической кибернетики Белорусского государственного университета
(протокол № 10 от 01.06.2021);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 7 от 30.06.2021)

Заведующий кафедрой
математической кибернетики _____ А.Л. Гладков

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – обучение студентов базовым разделам дискретной математики для развития у них навыков дискретного математического мышления и умения использования их при решении актуальных прикладных проблем современного общества.

Задачами учебной дисциплины являются изучение терминологии, основных утверждений и методов их доказательства, освоение методов решения типовых задач, а также ознакомление со способами моделирования практических задач в терминах задач из рассматриваемых разделов дискретной математики.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Термин “дискретная математика” происходит от латинского слова “discretus”, что в переводе означает “отдельный, разъединенный, разорванный, сложенный из отдельных частей, прерывный”. Фактически математика как наука с самого своего рождения делится на континуальную и дискретную. К первой традиционно относят все то, что явно или неявно содержит идеи теории пределов и непрерывности. Ко второй – все остальное. Таким образом, в широком смысле к дискретной математике можно отнести арифметику, алгебру, теорию множеств, общую теорию отображений, комбинаторный анализ, теорию графов, математическую логику, теорию алгоритмов, теорию кодирования, теорию функциональных систем и многое другое.

Значение дискретной математики и ее место в системе подготовки специалиста с высшим образованием в настоящее время определяется многими факторами. Так, ее можно рассматривать в качестве теоретической основы компьютерной математики. Кроме того, модели и методы дискретной математики являются хорошим средством и языком для построения и анализа моделей в различных науках, включая химию, биологию, генетику, физику, социологию, психологию, экологию и др. Наконец, дискретная математика является важным звеном общего математического образования.

Учебная дисциплина “Дискретная математика и теория графов” состоит из двух разделов – “Дискретная математика” и “Теория графов”. Первый раздел представлен основами перечислительной комбинаторики, а также элементами теории кодирования. На изложение материала второго раздела отводится большее количество часов, что вызвано следующими обстоятельствами.

Теория графов является одним из наиболее бурно развивающихся разделов дискретной математики, что в значительной степени обусловлено запросами стремительно расширяющейся области приложений. В теоретико-

графовых терминах формулируется большое число задач, связанных с дискретными объектами. Такие задачи возникают при проектировании интегральных схем, схем управления и различного рода сетей, при исследовании автоматов, логических цепей, блок-схем программ, в экономике и статистике, теории расписаний и дискретной оптимизации. Фактически, теория графов стала существенной частью математического аппарата кибернетики, языком дискретной математики. В значительной степени через теорию графов происходит ныне проникновение математических методов в науку и технику.

Учебная дисциплина относится **к модулю** «Дискретная математика и математическая кибернетика» компонента учреждения высшего образования.

Для понимания учебной дисциплины студенту требуется минимум предварительных математических знаний и навыков. В частности, нужно иметь самые начальные сведения из общей теории отображений, теории множеств и линейной алгебры, которые даются в учебных дисциплинах «Математический анализ» и «Алгебра и теория чисел» государственного компонента.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Дискретная математика и теория графов» должно обеспечить формирование следующих универсальных, базовых профессиональных и специализированных компетенций.

универсальные компетенции:

- УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;
- УК-2. Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий;
- УК-4. Работать в команде, толерантно воспринимать социальные, этнические, конфессиональные, культурные и иные различия;
- УК-5. Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;
- УК-6. Проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности.

базовые профессиональные компетенции:

- БПК-4. Применять теоретические знания и навыки в самостоятельной исследовательской деятельности;
- БПК-5. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

специализированные компетенции:

- СК-1. Осуществлять анализ контекста и поставленной проблемы, аргументированно выбирать оптимальный способ ее решения, согласовывать частичные проекты решения в общую согласованную

- архитектуру, выполнять реализацию проекта с учетом оценки накопленных и поступающих данных;
- СК-5. Применять основные понятия, утверждения и методы решения базовых задач дискретной математики.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать: основные понятия и утверждения из рассматриваемых разделов дискретной математики;

уметь: доказывать основные утверждения и применять их для решения типовых задач;

владеть: основными методами решения типовых задач из рассматриваемых разделов дискретной математики.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина «Дискретная математика и теория графов» изучается в 1-м, 2-м и 3-м семестрах. Учебная программа предназначена для студентов очной формы получения образования. Всего на изучение учебной дисциплины отведено 300 учебных часов, из которых 176 аудиторных, в том числе:

– в 1-м семестре 108 учебных часов, из которых 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудовое количество учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы, форма текущей аттестации – экзамен;

– во 2-м семестре 102 учебных часа, из которых 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудовое количество учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы, форма текущей аттестации – зачет;

– в 3-м семестре 90 учебных часов, из которых 36 аудиторных часов, из них: лекции – 16 часов, лабораторные занятия – 18 часов, управляемая самостоятельная работа – 2 часа.

Трудовое количество учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы, форма текущей аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Дискретная математика

Тема 1.1. Комбинаторика.

- 1.1.1. Предмет комбинаторики. Комбинаторная конфигурация. Подсчет числа комбинаторных конфигураций. Логические правила комбинаторики (суммы, произведения и биекции).
- 1.1.2. Размещения и сочетания. Число r -размещений из n элементов. Число r -размещений с повторениями из n элементов. Число подмножеств конечного множества.
- 1.1.3. Число r -сочетаний из n элементов. Биномиальная теорема и следствия из нее. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.
- 1.1.4. Число r -сочетаний с повторениями из n элементов.
- 1.1.5. Число упорядоченных $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ -разбиений конечного множества. Две комбинаторные интерпретации этого числа. Полиномиальная теорема.
- 1.1.6. Метод включения и исключения, его применение.
- 1.1.7. Рекуррентные соотношения. Рекуррентное соотношение k -го порядка для функции одной переменной, понятие решения и общего решения.
- 1.1.8. Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
- 1.1.9. Числа Фибоначчи. Вывод формулы n -го числа Фибоначчи решением линейного однородного рекуррентного соотношения 2-го порядка.

Тема 1.2. Элементы теории кодирования.

- 1.2.1. Кодирование и декодирование. Общая схема и основные понятия.
- 1.2.2. Алфавитное кодирование. Свойство префикса. Достаточные условия взаимной однозначности алфавитного кодирования. Необходимые и достаточные условия Маркова взаимной однозначности алфавитного кодирования.
- 1.2.3. Расстояние Хэмминга. Самокорректирующиеся коды.

Раздел 2. Теория графов

Тема 2.1. Базовая терминология.

- 2.1.1. Исторический обзор. Первоначальные понятия теории графов. Способы задания графов. Матрицы, ассоциированные с графом. Лемма о рукопожатиях.
- 2.1.2. Помеченный граф. Изоморфизм. Связь между матрицами смежности изоморфных графов. Операции над графами. Подграфы.

- 2.1.3. Маршруты, их типы и основные свойства. Связная компонента. Представление графа в виде дизъюнктного объединения связных компонент.
- 2.1.4. Число связных компонент в графе, полученном после удаления ребра из связного графа. Число ребер в графе с фиксированными числами вершин и связных компонент.
- 2.1.5. Метрические инварианты графа. Минимаксные задачи размещения. Оценки диаметра графа.
- 2.1.6. Волновой алгоритм и его применение. Двудольные графы. Теорема Кёнига. Распознавание двудольности.

Тема 2.2. Деревья.

- 2.2.1. Эквивалентные определения дерева. Остов графа, его свойства.
- 2.2.2. Теорема Кирхгофа о числе остовных деревьев. Число помеченных деревьев порядка n .
- 2.2.3. Нахождение остова минимального веса, алгоритмы Краскала и Прима.

Тема 2.3. Независимость, доминирование и покрытия.

- 2.3.1. Независимое множество вершин. Оценки числа независимости. Приближенный алгоритм нахождения числа независимости с априорной нижней оценкой. Клика.
- 2.3.2. Доминирование в графах и его применение. Оценки числа доминирования.
- 2.3.3. Вершинные и реберные покрытия. Паросочетания. Соотношения между параметрами независимости, доминирования и покрытия в произвольном графе. Теорема Галлаи.
- 2.3.4. Паросочетания в двудольных графах, теорема Холла.
- 2.3.5. Соотношения между параметрами независимости и покрытия в двудольном графе.

Тема 2.4. k -Связные графы.

- 2.4.1. Связь между числами вершинной и реберной связностей графа. k -Связная компонента. Взаимное расположение k -связных компонент.
- 2.4.2. Свойства, эквивалентные определения и структура 2-связного графа.
- 2.4.3. Блоки и точки сочленения, их свойства и взаимное расположение. Граф блоков и точек сочленения.
- 2.4.4. Сепараторы. Теорема Менгера о минимальном сепараторе. Критерий k -связности графа.

Тема 2.5. Обходы.

- 2.5.1. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости. Алгоритм Флёри.
- 2.5.2. Минимальное число реберно непересекающихся цепей, покрывающих граф. Теорема «Почти нет эйлеровых графов».

2.5.3. Гамильтоновы графы. Необходимое условие негамильтоновости двусвязного графа. Достаточные условия гамильтоновости графа.

Тема 2.6. Планарные графы.

2.6.1. Плоский и планарный графы. Элементы плоского графа. Свойства плоских (планарных) графов. Формула Эйлера о соотношении между числами вершин, ребер и граней связного плоского графа. Следствия из формулы Эйлера.

2.6.2. Взаимосвязь между двусвязностью графа и планарностью. Гомеоморфизм графов. Критерий планарности Понтрягина – Куратовского.

Тема 2.7. Раскраски.

2.7.1. Вершинная раскраска и ее применение. Алгоритм последовательной раскраски. Оценка хроматического числа через плотность графа. Теорема Зыкова.

2.7.2. Оценки хроматического числа через число независимости графа, максимальную степень вершин графа, а также через минимальные степени вершин его порожденных подграфов. Теорема Брукса.

2.7.3. Реберная раскраска и ее применение. Теорема Визинга. Хроматический индекс полного графа и двудольного графа.

Тема 2.8. Циклы и разрезы.

2.8.1. Булеан $B(X)$ конечного m -элементного множества X как линейное пространство над полем F_2 из двух элементов.

2.8.2. Особенности матрицы инцидентности $I(G)$ графа $G = (V, E)$, рассматриваемой как матрица над F_2 . Булеан $B(E)$ как линейное пространство над F_2 , его размерность, базис.

2.8.3. Пространство циклов $C(G)$, его размерность, базис. Связь пространства $C(G)$ с пространством решений однородной системы линейных уравнений $I(G)X = 0$. Фундаментальная система циклов.

2.8.4. Разрезы и разделяющие множества, связь между ними. Пространство разрезов $C^*(G)$, аналогия с пространством циклов. Фундаментальная система разрезов.

2.8.5. Матрицы фундаментальных циклов $M(G)$ и разрезов $M^*(G)$, их одновременное вычисление, исходя из матрицы $I(G)$.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Дискретная математика								
1.1	Комбинаторика	18			15		3		
1.1.1	Предмет комбинаторики. Комбинаторная конфигурация. Подсчет числа комбинаторных конфигураций. Логические правила комбинаторики (суммы, произведения, биекции).	2			2			[1, 4, 7]	Устный опрос
1.1.2	Размещения и сочетания. Число r -размещений из n элементов. Число r -размещений с повторениями из n элементов. Число подмножеств конечного множества.	2			2			[1, 4, 7]	Устный опрос
1.1.3	Число r -сочетаний из n элементов. Биномиальная теорема и следствия из нее. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.	2			2			[1, 4, 7]	Экспресс-опрос
1.1.4	Число r -сочетаний с повторениями из n элементов.	2			1		1	[1, 4]	Устный опрос
1.1.5	Число упорядоченных $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ -разбиений конечного множества. Две комбинаторные интерпретации этого числа. Полиномиальная теорема.	2			2			[1, 4]	Коллоквиум

1.1.6	Метод включения и исключения, его применение.	2			1		1	[1, 4]	Контрольная работа № 1
1.1.7	Рекуррентные соотношения. Рекуррентное соотношение k -го порядка для функции одной переменной, понятие решения и общего решения.	2			2			[1, 4]	Устный опрос
1.1.8	Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.	2			1		1	[1, 4]	Устный опрос
1.1.9	Числа Фибоначчи. Вывод формулы n -го числа Фибоначчи решением линейного однородного рекуррентного соотношения 2-го порядка.	2			2			[1, 4]	Экспресс-опрос
1.2	Элементы теории кодирования	6			5		1		
1.2.1	Кодирование и декодирование. Общая схема и основные понятия.	2			2			[5, 7]	Устный опрос
1.2.2	Алфавитное кодирование. Свойство префикса. Достаточные условия взаимной однозначности алфавитного кодирования. Необходимые и достаточные условия Маркова взаимной однозначности алфавитного кодирования.	2			1		1	[5, 7]	Контрольная работа № 2
1.2.3	Расстояние Хэмминга. Самокорректирующиеся коды.	2			2			[5, 7]	Коллоквиум
2	Теория графов								
2.1	Базовая терминология	12			10		2		
2.1.1	Исторический обзор. Первоначальные понятия теории графов. Способы задания графов. Матрицы, ассоциированные с графом. Лемма о рукопожатиях.	2			2			[2, 3, 5]	Устный опрос
2.1.2	Помеченный граф. Изоморфизм. Связь между матрицами смежностей изоморфных графов. Операции над графами. Подграфы.	2			2			[2, 3, 5]	Экспресс-опрос
2.1.3	Маршруты, их типы и основные свойства. Связная	2			1		1	[2, 3, 5]	Устный опрос

	компонента. Представление графа в виде дизъюнктного объединения связных компонент.								
2.1.4	Число связных компонент в графе, полученном после удаления ребра из связного графа. Число ребер в графе с фиксированными числами вершин и связных компонент.	2			2			[2, 3, 5]	Устный опрос
2.1.5	Метрические инварианты графа. Минимаксные задачи размещения. Оценки диаметра графа.	2			2			[2, 3, 5]	Экспресс-опрос
2.1.6	Волновой алгоритм и его применение. Двудольные графы. Критерий двудольности Кёнига. Распознавание двудольности.	2			1		1	[2, 3, 5]	Устный опрос
	Итого за 1-й семестр	36			30		6		
2.2	Деревья	6			5		1		
2.2.1	Эквивалентные определения дерева. Остов графа, его свойства.	2			1		1	[2, 3, 5]	Устный опрос
2.2.2	Теорема Кирхгофа о числе остовных деревьев. Число помеченных деревьев порядка n .	2			2			[2, 3, 5]	Устный опрос
2.2.3	Нахождение остова минимального веса, алгоритмы Краскала и Прима.	2			2			[2, 3, 5]	Экспресс-опрос
2.3	Независимость, доминирование и покрытия	10			9		1		
2.3.1	Независимое множество вершин. Оценки числа независимости. Приближенный алгоритм нахождения числа независимости с априорной нижней оценкой. Клика.	2			2			[2, 3, 5]	Устный опрос
2.3.2	Доминирование в графах и его применение. Оценки числа доминирования.	2			2			[2, 3, 5]	Устный опрос
2.3.3	Вершинные и реберные покрытия. Паросочетания. Соотношения между параметрами независимости, доминирования и покрытия в произвольном графе. Теорема Галлаи.	2			1		1	[2, 3, 5]	Контрольная работа № 3
2.3.4	Паросочетания в двудольных графах, теорема Холла.	2			2			[2, 3, 5]	Устный опрос

2.3.5	Соотношения между параметрами независимости и покрытия в двудольном графе.	2			2			[2, 3, 5]	Коллоквиум
2.4	<i>k</i>-Связные графы	8			7		1		
2.4.1	Связь между числами вершинной и реберной связностей графа. <i>k</i> -Связная компонента. Взаимное расположение <i>k</i> -связных компонент.	2			2			[2, 3, 5]	Устный опрос
2.4.2	Свойства, эквивалентные определения и структура 2-связного графа.	2			2			[2, 3, 5]	Экспресс-опрос
2.4.3	Блоки и точки сочленения, их свойства и взаимное расположение. Граф блоков и точек сочленения.	2			1		1	[2, 3, 5]	Устный опрос
2.4.4	Сепараторы. Теорема Менгера о минимальном сепараторе. Критерий <i>k</i> -связности графа.	2			2			[2, 3, 5]	Устный опрос
2.5	Обходы	6			6				
2.5.1	Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости. Алгоритм Флёрри.	2			2			[2, 3, 5]	Устный опрос
2.5.2	Минимальное число реберно непересекающихся цепей, покрывающих граф. Теорема «Почти нет эйлеровых графов».	2			2			[2, 3, 5]	Экспресс-опрос
2.5.3	Гамильтоновы графы. Необходимое условие негамильтоновости двусвязного графа. Достаточные условия гамильтоновости графа.	2			2			[2, 3, 5]	Коллоквиум
2.6	Планарные графы	4			3		1		
2.6.1	Плоский и планарный графы. Элементы плоского графа. Свойства плоских (планарных) графов. Формула Эйлера о соотношении между числами вершин, ребер и граней связного плоского графа. Следствия из формулы Эйлера.	2			1		1	[2, 3, 5]	Контрольная работа № 4
2.6.2	Взаимосвязь между двусвязностью графа и планарностью. Гомеоморфизм графов. Критерий планарности Понтрягина – Куратовского.	2			2			[2, 3, 5]	Экспресс-опрос

	Итого за 2-й семестр	34			30		4		
2.7	Раскраски	6			7		1		
2.7.1	Вершинная раскраска и ее применение. Алгоритм последовательной раскраски. Оценка хроматического числа через плотность графа. Теорема Зыкова.	2			2			[2, 3, 5]	Устный опрос
2.7.2	Оценки хроматического числа через число независимости графа, максимальную степень вершин графа, а также через минимальные степени вершин его порожденных подграфов. Теорема Брукса.	2			3		1	[2, 3, 5]	Устный опрос
2.7.3	Реберная раскраска и ее применение. Теорема Визинга. Хроматический индекс полного графа и двудольного графа.	2			2			[2, 3, 5]	Экспресс-опрос
2.8	Циклы и разрезы	10			11		1		
2.8.1	Булеан $B(X)$ конечного m -элементного множества X как линейное пространство над полем F_2 из двух элементов.	2			2			[2, 3, 5]	Устный опрос
2.8.2	Особенности матрицы инцидентности $I(G)$ графа $G = (V, E)$, рассматриваемой как матрица над F_2 . Булеан $B(E)$ как линейное пространство над F_2 , его размерность, базис.	2			2			[2, 3, 5]	Экспресс-опрос
2.8.3	Пространство циклов $C(G)$, его размерность, базис. Связь пространства $C(G)$ с пространством решений однородной системы линейных уравнений $I(G)X = 0$. Фундаментальная система циклов.	2			2		1	[2, 3, 5]	Устный опрос
2.8.4	Разрезы и разделяющие множества, связь между ними. Пространство разрезов $C^*(G)$, аналогия с пространством циклов. Фундаментальная система разрезов.	2			3			[2, 3, 5]	Коллоквиум
2.8.5	Матрицы фундаментальных циклов $M(G)$ и разрезов $M^*(G)$, их одновременное вычисление, исходя из матрицы $I(G)$.	2			2			[2, 3, 5]	Контрольная работа № 5
	Итого за 3-й семестр	16			18		2		
	ИТОГО	86			78		12		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.
2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. (Изд. второе, исправленное.) – М.: URSS. Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 392 с.
3. Емеличев В.А., Зверович И.Э., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Теория графов в задачах и упражнениях (учебное пособие). – М.: URSS. Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 416 с.
4. Зуев Ю.А. По океану дискретной математики: От перечислительной комбинаторики до современной криптографии. Т. 1: Основные структуры. Методы перечисления. Булевы функции. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 274 с.
5. Зуев Ю.А. По океану дискретной математики: От перечислительной комбинаторики до современной криптографии. Т. 2: Графы. Алгоритмы. Коды, блок-схемы, шифры. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 368 с.
6. Супрун В.П. Основы теории булевых функций. – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 208 с.
7. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учеб. Пособие для вузов / Под ред. В.А. Садовниченко. – 4-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 384 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004 – 960 с.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с.
3. Дистель Р. Теория графов: Пер. с англ. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. – 336 с.
4. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник. – СПб.: Издательство «Лань», 2018. – 476 с.
5. Липский В. Комбинаторика для программистов: Пер. с польск. – М.: Мир, 1988. – 213 с.
6. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2000. – 304 с.
7. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
8. Харари Ф. Теория графов: Пер с англ. – Изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Формами текущей аттестации по дисциплине «Дискретная математика и теория графов» учебным планом предусмотрены:

- в 1-м семестре – экзамен,
- во 2-м семестре – зачет,
- в 3-м семестре – экзамен.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику прогресса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

С целью текущего контроля знаний студентов предусматривается проведение устных опросов, экспресс-опросов, коллоквиумов и контрольных работ. Весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

- устный опрос – 17 %;
- экспресс-опрос – 17 %;
- коллоквиум – 33 %;
- контрольная работа – 33 %.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 30 %, экзаменационной оценки – 70 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Раздел 1. Дискретная математика

Тема 1.1. Комбинаторика (3 ч.)

1. Сколько существует вариантов выпадения n одинаковых игральных кубиков при условии, что как минимум на $l_i > 0$ из них выпадет по i очков, $i = 1, 2, \dots, 6$, где $l_1 + l_2 + \dots + l_6 \leq n$. В качестве вспомогательной задачи вначале предполагается получить формулу для числа решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_m = k$, $k \in \mathbb{N}$, в целых неотрицательных числах.
2. Пусть $\varphi(n)$ – значение функции Эйлера для натурального числа n (т.е. $\varphi(n)$ – количество таких натуральных чисел m , $m \leq n$, которые взаимно просты с n). Используя метод включения и исключения, подсчитать значение $\varphi(n)$, если $p_1, p_2, \dots, p_k$ – все простые делители числа n .
3. Сколькими способами можно замостить прямоугольную полосу размера 2×500 прямоугольниками размеров 1×2 и 2×2 . Предполагается составить описывающее задачу линейное однородное рекуррентное

соотношение 2-го порядка с постоянными коэффициентами, и, задав начальные условия, решить его методом характеристических уравнений.

(Форма контроля – устный опрос, контрольная работа № 1).

Тема 1.2. Элементы теории кодирования (1 ч.)

1. Пусть задана схема σ алфавитного кодирования: $\sigma(\alpha_1) = \{10\}$, $\sigma(\alpha_2) = \{12\}$, $\sigma(\alpha_3) = \{012\}$, $\sigma(\alpha_4) = \{101\}$, $\sigma(\alpha_5) = \{2100\}$. Определить:
– является ли алфавитное кодирование, определяемое схемой σ , взаимно однозначным,
– является ли цепочка $P = (1010122100)$ кодовым словом, и если да, то является ли она кодом ровно одного сообщения.

Форма контроля – контрольная работа № 2.

Раздел 2. Теория графов

Тема 2.1. Базовая терминология (2 ч.)

1. Доказать, что если в графе G минимальная степень вершин $\delta(G) \geq 2$, то G содержит цикл. Доказать также более сильное утверждение: если в графе G выполняется условие $\delta(G) \geq 3$, то G содержит цикл четной длины.
2. Доказать, используя критерий двудольности Кёнига, что граф является полным двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, изоморфных K_3 и $\overline{P_3}$. (Пустой граф также считается полным двудольным).

Форма контроля – устный опрос.

Тема 2.2. Деревья (1 ч.)

1. Сформулировать и доказать теорему Жордана: центр дерева состоит из одной вершины или двух смежных вершин. Разработать алгоритм нахождения центра дерева. Предполагается предварительно решить следующие подзадачи:
– доказать, что эксцентриситет любой вершины v диаметальной цепи дерева равен максимуму расстояний от вершины v до концов этой цепи;
– показать, что для любой вершины v дерева, не принадлежащей данной диаметальной цепи, существует вершина этой цепи с эксцентриситетом большим, чем эксцентриситет вершины v .

Форма контроля – устный опрос.

Тема 2.3. Независимость, доминирование и покрытия (1 ч.)

1. Доказать теорему Бержа: паросочетание M графа является наибольшим тогда и только тогда, когда в этом графе нет увеличивающих относительно M цепей. Для доказательства достаточности теоремы Бержа можно использовать следующее утверждение: если M_1 и M_2 – паросочетания графа G , а H – подграф графа G , порожденный ребрами

множества $(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$, то связными компонентами графа H могут быть только циклы четной длины и цепи, ребра которых поочередно входят в M_1 и M_2 .

Форма контроля – контрольная работа № 3.

Тема 2.4. k -Связные графы (1 ч.)

1. Доказать, что число точек сочленения произвольного графа G не превосходит $|G| - 2$. В качестве вспомогательных утверждений можно использовать следующие:
 - доказать, что для любого ребра e , принадлежащего некоторому циклу графа G , число точек сочленения графа G не превосходит числа точек сочленения графа $G - e$;
 - доказать, что каждый остов графа G может быть получен последовательным удалением ребер $e_1, e_2, \dots, e_m$ таких, что ребро e_i принадлежит некоторому циклу графа $G - e_{i-1}$.
2. Доказать, что число блоков связного графа выражается следующей формулой

$$1 + \sum_{v \in V(G)} (b(v) - 1),$$

где $b(v)$ – число блоков графа G , содержащих вершину v . Для доказательства рекомендуется использовать:

- понятие графа $bc(G)$ блоков и точек сочленения графа G ;
- утверждение о том, что для связного графа G граф $bc(G)$ является деревом;
- соотношение между числом вершин и ребер дерева.

Форма контроля – устный опрос.

Тема 2.6. Планарные графы (1 ч.)

1. Доказать, что формула Эйлера о соотношении между числами вершин, ребер и граней связного плоского графа обобщается на случай несвязного плоского (n, m) -графа с k связными компонентами следующим образом: $n - m + f = k - 1$.
2. Определить, при каких неотрицательных целых r существует r -регулярный планарный граф. Использовать при этом в качестве вспомогательного утверждения следующее: доказать, что в каждом планарном графе существует вершина степени не выше чем 5.

Форма контроля – контрольная работа № 4.

Тема 2.7. Раскраски (1 ч.)

1. Доказать, что для произвольного графа G порядка n выполняется неравенство $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$, где $\chi(G)$ – хроматическое число графа G . При доказательстве методом математической индукции по n в качестве вспомогательного утверждения предполагается доказать, что

если для вершины v графа G выполняется неравенство $\chi(G - v) < \chi(G)$, то $\deg(v) \geq \chi(G) - 1$.

Форма контроля – устный опрос.

Тема 2.8. Циклы и разрезы (1 ч.)

1. Доказать, что верхняя оценка $c(G) \leq 2^{v(G)} - 1$ на число циклов $c(G)$ графа G в терминах циклического ранга $v(G)$ является достижимой, при этом разность между правой и левой частями неравенства может быть сколь угодно большой (т.е. для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ существует граф G , для которого разность между $2^{v(G)} - 1$ и $c(G)$ будет не меньше чем n).

Форма контроля – устный опрос.

Примерная тематика лабораторных занятий

1. Подсчет числа комбинаторных конфигураций с помощью логических правил комбинаторики.
2. Решение задач с использованием формул для числа размещений и сочетаний.
3. Применение биномиальной теоремы и свойств биномиальных коэффициентов для решения комбинаторных задач.
4. Полиномиальная теорема и две комбинаторные интерпретации ее коэффициентов.
5. Решение задач с использованием метода включения и исключения.
6. Составление рекуррентных соотношений для решения задач перечислительной комбинаторики.
7. Решение линейных однородных рекуррентных соотношений 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
8. Решение задач на распознавание взаимной однозначности алфавитного кодирования.
9. Разбор первоначальных понятий теории графов. Распознавание изоморфных графов. Нахождение различных типов подграфов графа.
10. Связность, связная компонента. Нахождение графов с максимальным (минимальным) числом ребер при фиксированных числах вершин и связных компонент.
11. Решение задач на использование волнового алгоритма: нахождение расстояния от вершины до всех остальных вершин графа, нахождение метрических инвариантов графа, выделение связных компонент, распознавание двудольности графа.
12. Решение задач на использование эквивалентных определений дерева.
13. Нахождение числа остовных деревьев связного графа с помощью теоремы Кирхгофа.

14. Нахождение остова минимального веса во взвешенном графе с помощью алгоритмов Краскала и Прима.
15. Независимость, доминирование и покрытия в произвольных графах, оценки соответствующих инвариантов, соотношения между этими инвариантами.
16. Использование теоремы Холла для распознавания существования паросочетания в двудольном графе, покрывающем фиксированную долю.
17. Соотношения между параметрами независимости и покрытия в двудольном графе.
18. Нахождение чисел вершинной и реберной связностей графа.
19. Выделение блоков, 2- и 3-связных компонент в графе.
20. Построение графа блоков и точек сочленения заданного графа.
21. Решение задач на свойства, эквивалентные определения и структуру 2-связного графа.
22. Решение задач, использующих критерий эйлеровости графа.
23. Алгоритм Флёрри для нахождения эйлерова цикла в графе.
24. Нахождение минимального множества реберно непересекающихся цепей, покрывающих граф.
25. Задачи на гамильтоновы графы, достаточные условия гамильтоновости.
26. Использование формулы Эйлера и следствий из нее для решения задач о плоских (планарных) графах.
27. Распознавание планарности графа с помощью критерия Понтрягина–Куратовского.
28. Задачи на оценки хроматического числа графа, алгоритм последовательной раскраски графа.
29. Реберная раскраска графа и теорема Визинга.
30. Превращение булеана конечного множества X в линейное пространство над полем F_2 из двух элементов.
31. Решение задач с использованием свойств матрицы инцидентности $I(G)$ графа G , рассматриваемой как матрица над F_2 .
32. Пространство циклов $C(G)$ графа G , его размерность и базис. Нахождение фундаментальной системы циклов графа.
33. Пространство разрезов $C^*(G)$ графа G , его размерность и базис. Нахождение фундаментальной системы разрезов графа.
34. Одновременное вычисление матриц фундаментальных циклов $M(G)$ и разрезов $M^*(G)$ графа G , исходя из матрицы инцидентности $I(G)$.

Примерная тематика контрольных работ

- Контрольная работа № 1. «Комбинаторика: размещения и сочетания; свойства биномиальных коэффициентов; упорядоченные $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ -разбиения конечного множества; полиномиальная теорема».
- Контрольная работа № 2. «Комбинаторика: метод включения и исключения; составление рекуррентных соотношений; решение

линейных однородных рекуррентных соотношений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Элементы теории кодирования: необходимые и достаточные условия Маркова взаимной однозначности алфавитного кодирования».

- Контрольная работа № 3. «Начальные понятия теории графов: изоморфизм графов; подграфы; связный граф; связь между числами вершин, ребер и связных компонент графа; связь между матрицами смежности изоморфных графов; волновой алгоритм; двудольные графы; метрические инварианты графа. Деревья: соотношения между различными параметрами дерева; свойства остовов; нахождение остова минимального веса; теорема Кирхгофа о числе остовов связного помеченного графа. Независимость, доминирование и покрытия: оценки и нахождение соответствующих параметров в графе, связь между этими параметрами».
- Контрольная работа № 4. «Связность: оценка параметров k -связного графа; выделение в заданном графе малого порядка 2-связных, 3-связных и 4-связных компонент; дерево блоков и точек сочленения. Обходы в графах: покрытие графа минимальным числом реберно-непересекающихся цепей; гамильтоновы графы. Планарные графы: формула Эйлера о соотношении между числами вершин, ребер и граней связного плоского графа, следствия из нее».
- Контрольная работа № 5. «Раскраски: алгоритм последовательной раскраски; оценки хроматического числа; хроматический индекс графа Циклы и разрезы в графе: построение базисов пространства циклов и пространства разрезов графа; нахождение линейной комбинации произвольного элемента пространства циклов (разрезов) графа через базис этого пространства; одновременное вычисление матриц фундаментальных циклов и разрезов графа, исходя из матрицы инцидентности».

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает:

- осуществление студентами лично-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

Наиболее эффективной предполагается следующая форма реализации эвристического подхода: доказательства громоздких теорем, а также решения сложных задач разбиваются на этапы, после чего обучаемые подводятся к самостоятельному определению действий на этапах.

При организации образовательного процесса используется также *практико-ориентированный подход*, который предполагает:

- освоение содержания образования через решение практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по индивидуально заданной теме дисциплины;
- выполнение домашнего задания;
- проведение научно-исследовательских работ;
- подготовка к участию в научных и научно-практических конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Предмет комбинаторики. Комбинаторная конфигурация. Подсчет числа комбинаторных конфигураций. Логические правила комбинаторики (суммы, произведения и биекции).
2. Число r -размещений из n элементов. Число r -размещений с повторениями из n элементов.
3. Число подмножеств конечного множества.
4. Число r -сочетаний из n элементов. Биномиальная теорема и следствия из нее.
5. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.
6. Число r -сочетаний с повторениями из n элементов.
7. Число упорядоченных $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ -разбиений конечного множества. Две комбинаторные интерпретации этого числа.
8. Полиномиальная теорема.
9. Метод включения и исключения, его применение.

10. Рекуррентные соотношения. Рекуррентное соотношение k -го порядка для функции одной переменной. Решение и общее решение рекуррентного соотношения k -го порядка для функции одной переменной.
11. Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами.
12. Числа Фибоначчи. Вывод формулы n -го числа Фибоначчи решением линейного однородного рекуррентного соотношения 2-го порядка.
13. Кодирование и декодирование. Общая схема и основные понятия.
14. Алфавитное кодирование. Свойство префикса. Достаточные условия взаимной однозначности алфавитного кодирования.
15. Алфавитное кодирование. Необходимые и достаточные условия Маркова взаимной однозначности алфавитного кодирования.
16. Расстояние Хэмминга. Самокорректирующиеся коды.
17. Графы и способы их задания (аналитический, графический, матричный). Степень вершины графа. Лемма о рукопожатиях.
18. Изоморфизм графов. Связь между матрицами смежности изоморфных графов. Помеченный граф.
19. Операции над графами. Подграфы.
20. Маршруты, их типы и основные свойства.
21. Связная компонента графа. Представление графа в виде дизъюнктного объединения связных компонент.
22. Число связных компонент в графе, полученном после удаления ребра из связного графа.
23. Число ребер в графе с фиксированными числами вершин и связных компонент.
24. Метрические инварианты графа. Минимаксные задачи размещения. Оценки диаметра графа.
25. Волновой алгоритм и его применение.
26. Двудольные графы. Критерий двудольности Кёнига.
27. Деревья: эквивалентные определения.
28. Остов графа и его свойства.
29. Теорема Кирхгофа о числе остовных деревьев. Число помеченных деревьев порядка n .
30. Нахождение остова минимального веса, алгоритмы Краскала и Прима.
31. Независимое множество вершин. Оценки числа независимости. Приближенный алгоритм нахождения числа независимости с априорной нижней оценкой. Клика.
32. Доминирование в графах и его применение. Оценки числа доминирования.
33. Вершинные и реберные покрытия. Паросочетания. Соотношения между параметрами независимости и покрытия в произвольном графе. Теорема Галлаи.
34. Паросочетания в двудольных графах, теорема Холла.

35. Критерий существования паросочетания фиксированной мощности в двудольном графе.
36. Дефицит доли двудольного графа, его связь с числом паросочетания.
37. Соотношения между параметрами независимости и покрытия в двудольном графе.
38. Связь между числами вершинной и реберной связностей графа.
39. k -Связная компонента графа. Пересечение k -связных компонент.
40. Свойства, эквивалентные определения и структура 2-связного графа.
41. Блоки и точки сочленения, их свойства и взаимное расположение. Граф блоков и точек сочленения.
42. Сепараторы. Теорема Менгера. Критерий k -связности графа.
43. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости. Алгоритм Флёрри.
44. Минимальное число реберно непересекающихся цепей, покрывающих граф.
45. Теорема «Почти нет эйлеровых графов».
46. Гамильтоновы графы. Необходимое условие негамильтоновости двусвязного графа.
47. Достаточные условия гамильтоновости.
48. Плоский и планарный графы. Элементы плоского графа. Свойства плоских (планарных) графов.
49. Формула Эйлера о соотношении между числами вершин, ребер и граней связного плоского графа. Следствия из формулы Эйлера.
50. Взаимосвязь между двусвязностью графа и планарностью.
51. Гомеоморфизм графов. Критерий планарности Понтрягина–Куратовского.
52. Вершинная раскраска и ее применение. Алгоритм последовательной раскраски.
53. Оценка хроматического числа графа через плотность. Теорема Зыкова.
54. Оценка хроматического числа графа через число независимости.
55. Оценка хроматического числа графа через минимальные степени вершин его порожденных подграфов.
56. Оценка хроматического числа графа через максимальную степень вершин. Теорема Брукса.
57. Реберная раскраска и ее применение. Теорема Визинга.
58. Хроматический индекс полного графа.
59. Хроматический индекс двудольного графа.
60. Булеан $B(X)$ конечного m -элементного множества X как линейное пространство над полем F_2 из двух элементов.
61. Особенности матрицы инцидентности $I(G)$ графа $G = (V, E)$, рассматриваемой как матрица над полем F_2 из двух элементов. Булеан $B(E)$ как линейное пространство над F_2 , его размерность, базис.
62. Пространство циклов $C(G)$, его размерность, базис. Связь пространства $C(G)$ с пространством решений однородной системы линейных уравнений $I(G)X = 0$. Фундаментальная система циклов.

63. Пространство разрезов $C^*(G)$, аналогия с пространством циклов. Фундаментальная система разрезов.
64. Матрицы фундаментальных циклов $M(G)$ и разрезов $M^*(G)$, их одновременное вычисление, исходя из матрицы $I(G)$.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Введение в специальность	Кафедра математической кибернетики	Нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 10 от 01.06.2021 г.)
Математический анализ	Кафедра теории функций	Нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 10 от 01.06.2021 г.)
Алгебра и теория чисел	Кафедра высшей алгебры и защиты информации	Нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 10 от 01.06.2021 г.)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
на ____/____ учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры математической кибернетики (протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой
 доктор физ.-мат. наук, профессор

А.Л. Гладков

УТВЕРЖДАЮ
 Декан факультета
 доктор физ.-мат. наук, доцент

С.М. Босяков