Библиографические ссылки

1. *Vial J.P.* Strong and weak convexity of set and functions // Math. Oper. Res. 1983. Vol. 8. No. 2. P. 231–259.
2. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.:Физматлит, 2006.
3. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и функции. М.:Физматлит, 2006.
4. *Wu Z.Y.* Sufficient global optimality conditions for weakly convex minimization problems // J. Glob. Optim.. 2007. Vol. 39. P. 427–440.
5. *Balashov M.* About the gradient projection algorithm for a strongly convex function and a proximally smooth set // J. of Convex Analysis, 2017. Vol. 24. No. 2. P. 493–500.
6. *Balashov M., Polyak B., Tremba A.* Gradient projection and conditional gradient methods for constrained nonconvex minimization // Numerical Functional Analysis and Optimization, 2020. Vol. 41. No. 7. P. 822–849.
7. *Дудов С.И., Осипцев М.А.* Характеризация решения задач сильно-слабо выпуклого программирования // Мат. сборник (в печати).

ВАРИАНТ ПРЯМО-ДВОЙСТВЕННОГО МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.Г. Жадан

ФИЦ "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия
vgzhadan@yandex.ru

Предлагается прямо-двойственный метод решения линейной задачи полуопределенного программирования. Отличие данного метода от других прямо-двойственных методов заключается в том, что текущие точки итеративного процесса могут принадлежать границам допустимых множеств.

Пусть $\mathbb{S}^n$ обозначает пространство симметричных матриц порядка n, и пусть $\mathbb{S}^n_+$ — конус положительно полуопределенных матриц из $\mathbb{S}^n$. Рассматривается задача полуопределенного программирования:

$$\min\ C \bullet X, \qquad A_i \bullet X = b^i, \quad 1 \le i \le m, \qquad X \succeq 0, \tag{1}$$

где $M_1 \bullet M_2 = \operatorname{tr} M_1^T M_2$ — скалярное произведение между матрицами по Фробениусу, $M \succeq 0$ означает, что $M \in \mathbb{S}^n_+$. Все матрицы C, X и A_i, $1 \le i \le m$, принадлежат $\mathbb{S}^n$. Двойственной к (1) является задача

$$\max\ \langle b, u \rangle, \qquad \sum\nolimits_{i=1}^m u^i A_i + Y = C, \qquad Y \succeq 0, \tag{2}$$

в которой $b = (b^1, \ldots, b^m)^T$. Предполагается, что задачи (1) и (2) имеют решения и что матрицы A_i, $1 \le i \le m$, линейно независимы. Допустимые множества в задачах (1) и (2) обозначим $\mathcal{F}_P$ и $\mathcal{F}_D$.

Решения $X \in \mathcal{F}_P$ и $[u, Y] \in \mathcal{F}_D$ должны удовлетворять условиям

$$X \circ Y = 0_{nn}, \qquad A_i \bullet X = b^i, \quad 1 \le i \le m, \qquad Y = C - \sum\nolimits_{i=1}^{m} u^i A_i, \quad (3)$$

где $X \circ Y = (XY + YX)/2$. Предлагаемый метод основан на применении метода Ньютона для решения системы уравнений (3).

Допустимая пара $[X, Y]$ называется *согласованной*, если $X \circ Y \succeq 0$. Пусть $[X, Y]$ — согласованная пара с разложениями $X = QD(\eta)Q^T$, $Y = HD(\theta)H^T$, где Q и H — ортогональные матрицы, $D(\eta)$ и $D(\theta)$ — диагональные матрицы с векторами собственных значений. В граничных точках X и Y можно выделить подматрицы Q_{BN} и H_{NB} матриц Q и H такие, что образы $\mathcal{R}(Q_{BN})$ и $\mathcal{R}(H_{NB})$ совпадают с образом $\mathcal{R}(U_P)$ матрицы U_P. Здесь U_P — матрица, составленная из собственных векторов $X \circ Y$, соответствующих положительным собственным значениям λ_P матрицы $X \circ Y = UD(\lambda)U^T$. Такие согласованные пары $[X, Y]$ назовем *регулярными*.

В матрице Q выделим подматрицу Q_{BB}, состоящую из собственных векторов X, соответствующих положительным собственным значениям X и принадлежащих нуль-пространству $\mathcal{N}(Y)$ матрицы Y. Аналогично, в матрице H выделим подматрицу H_{NN}, состоящую из собственных векторов Y, соответствующих положительным собственным значениям Y и принадлежащих нуль-пространству $\mathcal{N}(X)$ матрицы X. В регулярных парах $[X, Y]$ образы $\mathcal{R}(Q_{BB})$ и $\mathcal{R}(H_{NN})$ входят в нуль-пространство $\mathcal{N}(U)$ матрицы U. Если сумма $\mathcal{R}(Q_{BB})$ и $\mathcal{R}(H_{NN})$ составляет все нуль-пространство $\mathcal{N}(U)$, то такие пары называются *неособыми*, в противном случае они называются *особыми*.

В неособой паре $[X, Y]$ получаем, что матрицы $X_U = U^T X U$ и $Y_U = U^T Y U$ имеют блочно-диагональный вид

$$X_U = \begin{bmatrix} X_{U_P} & 0 & 0 \\ 0 & X_{U_B} & 0 \\ 0 & 0 & X_{U_N} \end{bmatrix}, \quad Y_U = \begin{bmatrix} Y_{U_P} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{U_B} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{U_N} \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Здесь $U_B = Q_{BB}$, $U_N = H_{NN}$ и $X_{U_P} = U_P^T X U_P$, $X_{U_B} = U_B^T X U_B$ и $X_{U_N} = U_N^T X U_N$. Аналогично определяются блоки во второй матрице в (4). Блоки X_{U_N} и Y_{U_B} нулевые.

Показывается, что ньютоновские направления ΔX_U и ΔY_U в таких парах целесообразно также брать в блочно-диагональном виде. Они удовлетворяют следующей системе линейных уравнений

$$\begin{array}{rcl} Y_{U_P} \circ \Delta X_{U_P} + X_{U_P} \circ \Delta Y_{U_P} & = & -D(\lambda_P), \\ A_{i,U_P} \bullet \Delta X_{U_P} + A_{i,U_B} \bullet \Delta X_{U_B} & = & 0, \quad 1 \le i \le m, \\ K_{j,U_P} \bullet \Delta Y_{U_P} + K_{j,U_N} \bullet \Delta Y_{U_N} & = & 0, \quad 1 \le j \le l. \end{array} \qquad (5)$$

Здесь для единообразия используются матрицы $K_{j,U}$, $1 \le j \le l$, задающий базис в подпространстве, ортогональном подпространству порождаемом матрицами $A_{i,U}$, $1 \le i \le m$. Число неизвестных в системе (5) совпадает с числом уравнений. Получены точные выражения для ΔX_U и ΔY_U, причем размеры обратных матриц, которые возникают при решении системы (5) и зависят от ранга матриц U_P, уменьшаются в ходе итерационного процесса. Шаг для перемещения вдоль ΔX_U и ΔY_Y выбирается из условия наискорейшего спуска (уменьшения двойственного зазора). В особых парах $[X, Y]$ дополнительно решается вспомогательная линейная матричная задача дополнительности.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ПОСТРОЕНИЕ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ МЕТОДОВ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Н.Г. Журбенко

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина
zhurbnick@gmail.com

Предложенная Шором Н.З. идея использования операции преобразования пространства в (суб)градиентных алгоритмах хорошо известна, на ее основе разработаны широко используемые на практике эффективные алгоритмы негладкой оптимизации [1]. В частности, более 40 лет назад был разработан субградиентный алгоритм минимизации с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов – r-алгоритм [2]. Практика использования r-алгоритма показывает, что до сих пор он является одним из наиболее эффективных алгоритмов негладкой оптимизации. Известно [2], что r-алгоритм с бесконечным коэффициентом растяжения является алгоритмом сопряженных градиентов. Однако на основе такого предельного варианта r-алгоритма построение квазиньютовского метода невозможно: после n итераций (n – размерность пространства переменных) матрица преобразования пространства вырождается в нулевую.