обеих опор в зависимости от величины коэффициента трения. При трении равном приложенной боковой силе, при котором тело на жестких опорах не сдвинулось бы с места, центр масс системы набирает ненулевую скорость.

Библиографические ссылки

1. *Dosaev M., Samsonov V., Klimina L., Lokshin B., Hwang S.S., Selyutskiy Yu.* Braking of a solid body supported by two supports on a horizontal rough plane // ROMANSY 23 - Robot Design, Dynamics and Control, 2021. Vol. 601. P. 441–448.
2. *Neymark Y., Fufaev N.* The Painleve paradoxes and the dynamics of a brake shoe // J. Appl. Math. Mech., 1995. Vol. 59. No. 3. P. 343–352.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИЛЬНО-СЛАБО ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С.И. Дудов, М.А. Осипцев

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

DudovSI@info.sgu.ru, Osipcevm@gmail.com

1. В последние десятилетия растёт интерес к задачам слабо – сильно выпуклого программирования (ССВП), то есть к задачам минимизации сильно или слабо выпуклых функций на сильно или слабо выпуклом множествах. Это стало следствием изучения сильно и слабо выпуклых множеств и функций ([1–3]) в рамках параметрически выпуклого анализа, являющимся одним из разделов негладкого анализа.

В докладе будут приведены необходимые и достаточные условия решения задач ССВП. Используемые обозначения: $D_r(x_1, x_2)$ – пересечение всех евклидовых шаров радиуса $r > 0$, содержащих точки x_1 и x_2; $\| \cdot \|$ – евклидова норма; $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| \leq r\}$; $Arg \min\limits_{x \in D} f(x) = \{y \in D : f(y) = \min\limits_{x \in D} f(x)\}$; $\partial f(x)$ – субдифференциал Кларка функции $f(\cdot)$ в точке x; $N(x, D)$ – нормальный конус Кларка множества D в точке x.

2. Введём необходимые определения (см. [1–3]).

Определение 1. *Множество $A \subset \mathbb{R}^p$ называется*
а) r-сильно выпуклым,если с любой парой точек x_1 и x_2, таких что $\|x_1 - x_2\| \leq 2r$ оно содержит и $D(x_1, x_2)$.

б) r-слабо выпуклым (по Виалю [7]), если для любой пары точек x_1 и x_2 из A таких, что $\|x_1 - x_2\| < 2r$, $x_1 \neq x_2$, пересечение $D_r(x_1, x_2) \cap A$ содержит хотя бы ещё одну точку отличную от x_1 и x_2.

Определение 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ – открытое выпуклое множество и $\rho > 0$. Функция $f(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ называется ρ-сильно (слабо) выпуклой на Ω, если функция $f(\cdot) - \frac{\rho}{2}\|\cdot\|^2$ $(f(\cdot) + \frac{\rho}{2}\|\cdot\|^2)$ – выпукла на Ω.*

3. Приведём некоторые результаты.

Теорема 1. *Пусть $r > 0$, $\rho > 0$, D – r-сильно выпуклое множество, $f(\cdot)$ – ρ-слабо выпуклая на $\mathbb{R}^p$ функция. Для того, чтобы $x_0 \in Arg\min\limits_{x \in D} f(x)$ необходимо, а если $\frac{M}{r} \geq \rho$, то и достаточно, что бы $0_p \in \partial f(x_0) + N(x_0, D)$. При этом для всех $x \in D$ выполняется неравенство*

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{M}{r} - \rho\right)\|x - x_0\|^2.$$

Здесь $M = \max\{\|v\| : v \in \partial f(x_0) \cap -N(x_0, D)\}$.

Теорема 2. *Пусть $r > 0$, $\rho > 0$, D – r-слабо выпуклое множество, $f(\cdot)$ – ρ-слабо выпуклая на $\mathbb{R}^p$ и дифференцируемая в точке x_0 функция, для некоторого $\delta > 0$ выполняется $B(x_0, \delta) \subset f'(x_0) + N(x_0, D)$ и $f'(x_0) \neq 0_p$. Если $\frac{\|f'(x_0\|}{r} \geq \rho\sqrt{1 - \frac{r^2}{\|f'(x_0)\|^2}}$, то $x_0 \in Arg\min\limits_{x \in D} f(x)$. А если $\frac{\|f'(x_0\|}{r} < \rho\sqrt{1 - \frac{r^2}{\|f'(x_0)\|^2}}$, то $x_0 \in Arg\min\limits_{x \in D(\delta)} f(x)$, где $D(\delta) = \left\{x \in D : \|x - x_0\| < \frac{2r\delta}{\sqrt{\delta^2 + \left(\rho r - \sqrt{\|f'(x_0\|^2 - \delta^2}\right)^2}}\right\}$.*

Кроме того, получены необходимые и достаточные условия минимума сильно выпуклой функции на слабо выпуклом множестве, достаточные условия локального минимума других задач ССВП, рассматривалась также сильно – слабо выпуклая задача математического программирования.

В процессе доклада будут даны сравнения с другими известными результатами по характеризации решения задач ССВП.

Библиографические ссылки

1. *Vial J.P.* Strong and weak convexity of set and functions // Math. Oper. Res. 1983. Vol. 8. No. 2. P. 231–259.
2. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.:Физматлит, 2006.
3. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и функции. М.:Физматлит, 2006.
4. *Wu Z.Y.* Sufficient global optimality conditions for weakly convex minimization problems // J. Glob. Optim.. 2007. Vol. 39. P. 427–440.
5. *Balashov M.* About the gradient projection algorithm for a strongly convex function and a proximally smooth set // J. of Convex Analysis, 2017. Vol. 24. No. 2. P. 493–500.
6. *Balashov M., Polyak B., Tremba A.* Gradient projection and conditional gradient methods for constrained nonconvex minimization // Numerical Functional Analysis and Optimization, 2020. Vol. 41. No. 7. P. 822–849.
7. *Дудов С.И., Осипцев М.А.* Характеризация решения задач сильно-слабо выпуклого программирования // Мат. сборник (в печати).

ВАРИАНТ ПРЯМО-ДВОЙСТВЕННОГО МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.Г. Жадан

ФИЦ “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия
vgzhadan@yandex.ru

Предлагается прямо-двойственный метод решения линейной задачи полуопределенного программирования. Отличие данного метода от других прямо-двойственных методов заключается в том, что текущие точки итеративного процесса могут принадлежать границам допустимых множеств.

Пусть $\mathbb{S}^n$ обозначает пространство симметричных матриц порядка n, и пусть $\mathbb{S}^n_+$ — конус положительно полуопределенных матриц из $\mathbb{S}^n$. Рассматривается задача полуопределенного программирования:

$$\min\ C \bullet X, \qquad A_i \bullet X = b^i, \quad 1 \le i \le m, \qquad X \succeq 0, \tag{1}$$

где $M_1 \bullet M_2 = \operatorname{tr} M_1^T M_2$ — скалярное произведение между матрицами по Фробениусу, $M \succeq 0$ означает, что $M \in \mathbb{S}^n_+$. Все матрицы C, X и A_i, $1 \le i \le m$, принадлежат $\mathbb{S}^n$. Двойственной к (1) является задача

$$\max\ \langle b, u\rangle, \qquad \sum\nolimits_{i=1}^{m} u^i A_i + Y = C, \qquad Y \succeq 0, \tag{2}$$