

интервалами релаксации, на которых $u_t = 0$. Возбуждение осуществляется варьируемым гармоническим сигналом и прямоугольными импульсами разной длительности. Из последовательностей $y(t)$ на интервалах релаксации формируется специальная матрица, которая используется для нахождения размерности модели n и матриц A и C . Матрица B находится из (2) с учетом того, что известны Γ_{t-1} и x_k .

В рассматриваемом методе размерность модели является параметром регуляризации, который находится из принципа невязки или специальной процедурой определения квазиоптимального n .

АСИМПТОТИКА МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА МАЛЫХ ПРОМЕЖУТКАХ ВРЕМЕНИ

М.И. Гусев, И.О. Осипов

Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского,
Екатеринбург, Россия
`{gmi, i.o.osipov}@imm.uran.ru`

Введение. В докладе исследуется асимптотическое поведение множеств достижимости нелинейных управляемых систем с интегральными квадратичными ограничениями на управление на малых промежутках времени. Приводится достаточное условие асимптотической эквивалентности множеств достижимости нелинейной и линеаризованной систем при стремлении к нулю длины промежутка времени [1]. Понятие асимптотической эквивалентности множеств определяется следующим образом [2]. Пусть выпуклые компактные множества $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ таковы, что нулевой вектор является внутренней точкой каждого из них. Расстоянием Банаха-Мазура $\rho(X, Y)$ между X и Y называется величина $\rho(X, Y) := \log(r(X, Y) \cdot r(Y, X))$, где $r(X, Y) = \inf\{t \geq 1 : tX \supset Y\}$. Множества $X(\varepsilon), Y(\varepsilon)$ называются асимптотически эквивалентными, если $\rho(X(\varepsilon), Y(\varepsilon)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

1. Множества достижимости на малых промежутках времени. Исследуются множества достижимости аффинных по управлению систем на интервале времени $t_0 \leq t \leq t_0 + \bar{\varepsilon}$

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^m$ ($m \leq n$), $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица полного ранга, $m \leq n$, $\bar{\varepsilon}$ — некоторое фиксированное положительное число, а

функции $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ предполагаются непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми по x .

Под $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2[t_0, t_0 + \varepsilon]$ будем понимать гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций, а $B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu_0)$ — шар радиуса μ_0 в \mathbb{L}_2 .

Обозначим $G_y(\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu), y = Cx(t_0 + \varepsilon, x^0, u(\cdot))\}$ множество достижимости системы (1) по выходу y . В частности, $G_y(\varepsilon)$ может быть проекцией множества достижимости по состоянию на координатные плоскости.

Линеаризованную вдоль порождённой управлением $u \equiv 0$ траектории $x(t, 0)$ систему (1) после замены времени $t = \varepsilon\tau + t_0$ представим в виде

$$\delta\dot{z} = \varepsilon A(\varepsilon\tau + t_0)\delta z(\tau) + B(\varepsilon\tau + t_0)v(t), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad \delta z(0) = 0. \quad (2)$$

Через $\widehat{G}_y(\varepsilon)$ будем обозначать множество достижимости системы (2) по выходу в момент $\tau = 1$, порожденное управлениями $\nu(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu\sqrt{\varepsilon})$. Множество $\widehat{G}_y(\varepsilon)$ — эллипсоид в \mathbb{R}^m .

Введем отображение $H'_\varepsilon : \mathbb{L}_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $H'_\varepsilon(\delta v(\cdot))\delta\nu = C\delta z(1, v(\cdot))$. H'_ε — липшицево, с константой $L(\varepsilon)$. Обозначим через W_ε грамиан управляемости системы (2), а через $\nu^y(\varepsilon)$ — минимальное собственное число матрицы $CW_\varepsilon C^\top$.

Теорема 1. *Если линеаризованная система (1) вполне управляема по выходу $\delta y = C\delta z$ и $L^2(\varepsilon)\varepsilon/\nu^y(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то при достаточно малых ε множество $G_y(\varepsilon) - Cx(t_0 + \varepsilon, 0)$ выпукло и асимптотически эквиваленто множеству $\widehat{G}_y(\varepsilon)$.*

2. Пример. Асимптотика множеств достижимости изучена на примере системы четвёртого порядка:

$$\dot{x}_1 = x_3^2 - x_4^2, \quad \dot{x}_2 = 2x_3x_4, \quad \dot{x}_3 = -0.5x_4u, \quad \dot{x}_4 = 0.5x_3u$$

с начальным состоянием $x_1(0) = x_2(0) = x_4(0) = 0$, $x_3(0) = 1$ и ограничениями на управление $\int_0^1 (u(t) - 1)^2 dt \leq 1$.

Изучаются проекции множества достижимости на плоскости второй-третьей и второй-четвёртой координат состояния. В первом случае условия теоремы 1 не выполняются; численное моделирование показывает невыпуклость этой проекции при малых временных промежутках. Во втором случае условия теоремы выполняются и соответствующие множества асимптотически эквиваленты, что подтверждается результатами численного моделирования.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Минобрнауки России.

Библиографические ссылки

1. *Gusev M.I., Osipov I.O.* Asymptotic behavior of reachable sets on small time intervals. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2020. Vol. 309, suppl.1. P. S52–S64.
2. *Goncharova E., Ovseevich A.* Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set// Journal of Optimization Theory and Applications. 2016. Vol. 168 (2). P. 615–624.

ПАДЕ РЕГУЛЯТОР В СЛАБО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ SDC СИСТЕМЕ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ С МАЛЫМ ШАГОМ

Ю.Э. Даник, М.Г. Дмитриев

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Москва, Россия

Московский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный, Россия
yuliadanik@gmail.com, mdmitriev@mail.ru

Введение. Для класса дискретных слабо нелинейных систем управления с коэффициентами, зависящими от состояния (SDC), на конечном интервале с малым шагом строится субоптимальный синтез на основе подхода SDRE, а также асимптотики метода пограничных функций по малому шагу. Конструируется одноточечная матричная Паде аппроксимация (ПА) решения начальной сингулярно возмущенной задачи для дискретного матричного уравнения Риккати. Численные эксперименты иллюстрируют экстраполяционные свойства построенного регулятора для более широкого диапазона изменения величины шага.

1. Постановка задачи. Рассмотрим дискретную вариационную задачу с возмущенными коэффициентами

$$x(t + \varepsilon) = A(x, \varepsilon)x + B(x, \varepsilon)u, \quad x(0) = x^0, \quad t \in [0, T],$$

$$J = \frac{1}{2}x'(T)Fx(T) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x'(k\varepsilon)Q(x, \varepsilon)x(k\varepsilon) + u'(k\varepsilon)Ru(k\varepsilon)),$$

$$x(t) \in X \in R^n, \quad u \in R^r, \quad t = k\varepsilon, \quad k = 0, 1, 2.., N - 1, \quad T = N\varepsilon,$$