2. Основные результаты. На установившемся движении наблюдается баланс между обобщёнными силами, одна из которых соответствует аэродинамическому моменту, действующему на пропеллер, а другая — сумме лобового сопротивления пропеллера и корпуса.

За счет выбора коэффициента n передачи можно обеспечить желаемое соотношение между виртуальными перемещениями, соответствующими указанным обобщенным силам. Таким образом, было достигнуто существование установившегося режима, при котором корпус движется против ветра за счёт энергии ветра.

Работа выполнена в рамках НИР «Разработка методов исследования управляемых механических систем, взаимодействующих со сплошной средой» (АААА-А19-119012990123-0).

Библиографические ссылки

1. *Чебышев П.Л.* Избранные труды. М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1955.
2. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986, 86 с.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ, ШТРАФЫ, РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И МЕТОД НЬЮТОНА

А.И. Голиков

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
gol-a@yandex.ru

Задачи нахождения решения недоопределенной системы линейных уравнений с неотрицательными переменными или системы линейных неравенств не относятся к классическим задачам вычислительной линейной алгебры. Как правило, эти задачи имеют неединственное решение. Эти задачи сводятся к задачам оптимизации. Для решения таких задач полезно использовать теорию двойственности и различные методы оптимизации, например, метод Ньютона. Оптимизационные методы дают возможность выделять из множества решений линейной системы единственное решение (например, нормальное решение, проекцию заданной точки).

На примере задачи нахождения проекции заданной точки на множество решений системы линейных уравнений и/или неравенств показана связь между методом штрафной функции, методом регуляризации и двойственностью возникающих вспомогательных задач. Так, задачу $Ax = b, \quad x \geq 0_n$ — нахождение неотрицательного решения системы линейных уравнений, где матрица $A \in R^{m \times n}$, $m < n$, векторы $b \in R^m$, $x \in R^n$, полезно рассмотреть как задачу линейного программирования с нулевым вектором коэффициентов целевой функции:

$$P: \quad \min_{x \in X} 0_n^\top x, \quad X = \{x \in R^n \ : \ Ax = b, \quad x \geq 0_n\}.$$

Прямую задачу линейного программирования P можно преобразовать следующими двумя способами: 1) с помощью квадратичного штрафа (преобразование pen) снять ограничения, 2) используя квадратичную регуляризацию (преобразование reg) прийти к задаче с единственным решением. Можно продолжить преобразование полученных задач, применяя, соответственно, квадратичную регуляризацию и квадратичный штраф. Аналогично можно поступить с двойственной задачей D:

$$D: \quad \max_{u \in U} b^\top u, \quad U = \{u \in R^m \ : \ A^\top u \leq 0_n\}.$$

Приведенную связь оштрафованных и регуляризованных задач P и D можно представить в виде следующей схемы, где вертикальные стрелки означают взаимную двойственность:

$$\begin{tikzcd}
P_{pr} \arrow[d, leftrightarrow] & P_p \arrow[l, "reg"'] \arrow[d, leftrightarrow] & P \arrow[l, "pen"'] \arrow[r, "reg"] \arrow[d, leftrightarrow] & P_r \arrow[r, "pen"] \arrow[d, leftrightarrow] & P_{rp} \arrow[d, leftrightarrow] \\
D_{rp} & D_r \arrow[l, "pen"'] & D \arrow[l, "reg"'] \arrow[r, "pen"] & D_p \arrow[r, "reg"] & D_{pr}
\end{tikzcd}$$

Двойственные задачи D_p, D_{pr}, D_{rp} являются задачами безусловной максимизации вогнутых кусочно-квадратичных функций с числом переменных m меньшим, чем n, где n — число переменных соответствующих прямых задач. Их решения дают возможность по простым формулам вычислить решения соответствующих взаимно двойственных задач P_r, P_{rp}, P_{pr}.

В [1] применяется обобщенный метод Ньютона к задаче D_p

$$\min_{u \in R^m} H(u) = -b^\top u + \frac{1}{2}\|(\hat{x} + A^\top u)_+\|^2 \tag{1}$$

для нахождения проекции x^* заданной точки $\hat{x}$ на множество неотрицательных решений линейной системы. По решению u^* задачи (1) легко вычисляется искомая проекция $x^* = (\hat{x} + A^\top u^*)_+$.

Так как $H(u)$ дифференцируема один раз, то используется обобщенная матрица Гессе вида $H_{uu}(u) = A\mathrm{Diag}\left(\mathrm{sign}(\hat{x} + A^\top u)_+\right) A^\top$.

На $k+1$ шаге метода Ньютона решается система $m \times m$ линейных уравнений с матрицей $H_{uu}(u) + \delta \mathrm{Diag}(AA^\top)$, где $0 \le \delta \ll 1$.

Установлена глобальная конечная сходимость метода Ньютона при соответствующем выборе длины шага спуска для безусловной оптимизации. Указана связь этого шага, выбора величины δ, метода сопряженного градиента решения системы линейных уравнений для определения направления спуска в методе Ньютона. Проведены численные эксперименты с трудными задачами из библиотеки NETLIB [1]. Эксперименты с задачами, сгенерироваными случайным образом, показали возможность с помощью системы MATLAB на персональном компьютере находить проекцию точки при m порядка 4 тыс. и n порядка нескольких миллионов за несколько минут. При решении случайным образом сгенерированных задач вместо $\mathrm{Diag}(AA^\top)$ к обобщенной матрице Гессе $H_{uu}(u)$ добавлялось выражение δI_m, где I_m — единичная матрица размерности m.

Библиографические ссылки

1. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Капорин И.Е.* Метод ньютоновского типа для решения систем линейных уравнений и неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2019. Т. 59. № 12. С. 2086–2101.

ПОДВОДНЫЙ КАПСУЛЬНЫЙ РОБОТ, УПРАВЛЯЕМЫЙ ДВИЖЕНИЕМ ВНУТРЕННЕГО МАХОВИКА

С.А. Голованов, Л.А. Климина, М.З. Досаев, Ю.Д. Селюцкий

НИИ механики МГУ, Москва, Россия
klimina@imec.msu.ru

Введение. Капсульные роботы, перемещающиеся в жидкости при помощи движения внутренних масс, активно изучаются современными исследователями. Разрабатываются новые конструктивные решения и новые подходы к математическому моделированию таких устройств. Подробный обзор содержится в [1]. Среди основополагающих работ в данной области можно назвать, например [2–4]. Из последних результатов наиболее близки к задаче данной работы (по принципу перемещения робота) статьи [1, 5–7]. Существует много подходов к описанию взаимодействия капсульного робота с жидкостью. Активно используются уравнения Кирхгофа, Навье-Стокса, методы описания сходящих вихрей, учитывается влияние присоединенных масс, силы Архимеда.