дение в задачи моделирования и управления динамикой ВИЧ инфекции. М.-Ижевск: АНО «Ижевский институт компьютерных исследований», 2016.

6. *Bocharov G., Casella V., Argilaguet J., Grebennikov D., Guerri-Fernandez R., Ludewig B., Meyerhans A.* Numbers game and immune geography as determinants of coronavirus pathogenicity // Frontiers in Cellular and Infection Microbiology. 2020. Vol. 10.

7. *Bocharov G.A., Grebennikov D.S., Savinkov R.S.* Mathematical immunology: from phenomenological to multiphysics modelling // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2020. Vol. 35. No. 4. P. 203–213.

ДОКАЗАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКОЙ И ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А.С. Антипин[1], Е.В. Хорошилова[2]

[1] ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
asantip@yandex.ru

[2] МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
khorelena@gmail.com

На конечном отрезке времени $[t_0, t_1]$ рассматривается задача оптимального управления с линейной динамикой и непрерывными фазовыми ограничениями в виде неравенства. Терминальное условие на правом конце отрезка задано неявно как решение краевой задачи линейного программирования. Формально задача включает две компоненты: управляемую динамику и краевую задачу, и формулируется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1^*, \\ \qquad G(t)x(t) \le g(t),\ \ x(\cdot) \in \mathbb{AC}^n[t_0, t_1],\ u(\cdot) \in \mathrm{U}, \\ \qquad x_1^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle \varphi_1, x_1\rangle \mid G_1 x_1 \le g_1,\ x_1 \subset \mathbb{R}^n\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $D(t), B(t), G(t)$ – непрерывные матрицы, φ_1, $g(t)$ – заданные вектор и непрерывная функция; $G(t_1) = G_1$, $g(t_1) = g_1$, x_0 также заданы; $\mathbb{AC}^n[t_0, t_1]$ есть линейное многообразие абсолютно непрерывных функций; $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^{\mathrm{T}}$ – траектория (фазовая переменная). Для каждого $t \in [t_0, t_1]$ вектором $u(t) = (u_1(t), ..., u_r(t))^{\mathrm{T}} \in \mathrm{U}$ обозначает управление, где $\mathrm{U} \in \mathbb{R}^r$ есть выпуклый компакт.

Задача (1) рассматривается в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2^n[t_0, t_1]$ и является обобщением задачи линейного программирования. В основу используемого подхода положен лагранжев формализм: решение исходной задачи сводится к поиску седловых точек лагранжиана. Для этого вводится функция Лагранжа. К лагранжиану выписывается двойственный лагранжиан и принимается во внимание, что в регулярном случае прямой и двойственный лагранжианы имеют одни и те же седловые точки $(x_1^*,\, x^*(\cdot), u^*(\cdot); p_1^*, \psi^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$.

Отталкиваясь от седловых неравенств для двойственного лагранжиана, выводится двойственная задача [1, 2]. Комбинируя основные элементы взаимно-двойственных задач, формируется дифференциальная система

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \quad x^*(t_0) = x_0,$$

$$\langle G_1 x_1^* - g_1, p_1 - p_1^* \rangle \leq 0, \quad p_1 \geq 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle G(t)x^*(t) - g(t), \eta(t) - \eta^*(t) \rangle dt \leq 0, \quad \eta(t) \geq 0,\ t \in [t_0, t_1],$$

$$\frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t) + G^{\mathrm{T}}(t)\eta^*(t) = 0, \quad \psi_1^* = \nabla\varphi_1(x_1^*) + G_1^{\mathrm{T}} p_1^*,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt \leq 0, \quad u(\cdot) \in \mathrm{U},$$

где $x_1^* = x^*(t_1)$, отражающая необходимое и достаточное условия оптимальности для задачи (1). Для выпуклых задач, эти условия соответсвуют усиленному принципу максимума.

Для решения системы разработан седловой метод градиентного типа [3, 4]. Доказана сходимость итеративного процесса к решению задачи по всем его компонентам, в том числе сильная сходимость по фазовым и сопряжённым траекториям и слабая сходимость по управлениям.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00312).

Библиографические ссылки

1. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Linear Programming and Dynamics // Ural Mathematical Journal. 2015. Vol. 1. № 1. P. 3–19.

2. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Saddle-point approach to solving problem of optimal control with fixed ends // Journal of Global Optimization. 2016. Vol. 65. No. 1. P. 3–17.
3. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Dynamics, phase constraints, and linear programming // Comput. Math. Math. Phys. 2020. Vol. 60. No. 2. P. 184–202.
4. *Antipin A.S., Khoroshilova E.V.* Controlled dynamic model with boundary-value problem of minimizing a sensitivity function // Optimization Letters. 2019. Vol. 13. No. 3. P. 451–473.

ВАРИАЦИОННЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Аргучинцев

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия
arguch@math.isu.ru

Рассматривается специальный класс задач оптимального управления системой линейных гиперболических уравнений первого порядка следующего вида:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = \Phi(s,t)x + f(s,t) + C(t)y, \qquad (1)$$

$$(s,t) \in \Pi,\ \Pi = S \times T,\ S = [s_0, s_1], T = [t_0, t_1].$$

Здесь $x = x(s,t), y = y(t)$ — n и m-мерные вектор-функции соответственно; матрица $A(s,t)$ является диагональной с сохраняющими знак в Π непрерывными диагональными элементами. Задание начально-краевых условий для системы (1) в точках начала соответствующих характеристик при выполнении определенных условий гладкости и согласования обеспечивает существование и единственность почти классического решения гиперболической системы.

Фукнкция y в правой части (1) определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = B(u(t),t)y(t) + d(u(t),t), \quad t \in T, \quad y(t_0) = y^0. \qquad (2)$$

Здесь $B(u(t),t)$ является $m \times m$ матричной функцией.

Допустимые управления $u(t)$ предполагаются ограниченными на отрезке T функциями, удовлетворяющими почти всюду на этом отрезке классическим ограничениям типа включения