В случае двойственно вырожденного оптимального плана возможно неоднозначное решение. Но и оно может быть определено, исходя из равенства (4). Пусть

$$S^0 = \{s = \overline{1,n} : \, c_s/(p'a_s) = \max_{j=\overline{1,n}} (c_j/(p'a_j))\},$$

(z^{0s}, x^{0s}), $s \in S^0$, — оптимальные планы задачи (2), вычисленные по формулам (3) с заменой j_0 на $s \in S^0$. Тогда для любых

$$0 \le \alpha_s \le 1, \, s \in S^0, \quad \sum_{s \in S^0} \alpha_s = 1, \tag{5}$$

оптимальными будут и планы

$$\left(z^0 = \sum_{s \in S^0} \alpha_s z^{0s}, \quad x^0 = \sum_{s \in S^0} \alpha_s x^{0s} \right).$$

Другими словами, в случае неоднозначного оптимального набора товаров потребитель вправе самостоятельно выбрать стратегию (5) построения оптимального плана, при которой может выпускаться не один вид продукции.

Библиографические ссылки

1. *Альсевич В.В.* Введение в математическую экономику. Кн. 1: Конструктивная теория. Учеб. пособие. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2021.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Н.А. Андрюшечкина[1], Г.А. Бочаров[2], А.В. Ким[3], А.С. Мамаджонов[4]

[1] Уральский государственный аграрный университет, Екатеринбург, Россия
nadia@mail.ru

[2] Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Москва, Россия
bocharov@inm.ras

[3] Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
avkim@imm.uran.ru

[4] Уральский федеральный университет им. первого президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
akmali1997@mail.ru

Рассматриваются обобщения, современные методы анализа и решения рассмотренных в [1] задач управления системами с последействием

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t+s), u], \ -\tau \le s \le 0 \tag{1}$$

$(f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) : R \times R^n \times Q[-\tau,0) \times R^r \to R^n)$.

В дальнейшем используются обозначения: $\tau = const > 0$, $h = \{x, y(\cdot)\} \in H = R^n \times Q[-\tau, 0)$, $\|h\|_H = \max\{\|x\|, \|y(\cdot)\|_\tau\}$; понятия и конструкции i-гладкого анализа [2, 3].

В работе в рамках общего подхода [1, 4] разработаны, на основе методологии i-гладкого анализа [2, 3], конструктивные алгоритмы решения следующих задач [1]:

Задача 1.1. Найти управление $u = u^0(t, x, y(\cdot)) : R \times R^n \times Q[-\tau, 0) \to R^r$ такое, что движение $x \equiv 0$ в замкнутой системе (1) (т.е при $u(t) = u^0(t, x_t)$) асимптотически устойчиво относительно возмущений из области $G_0 = \{\|h\|_H \leq \eta\}$, и такое, что для всех $t_0 \geq 0$ и $h^0 \in G_0$ имеет место минимум $I_\infty[t_0, h^0, u^0] = \min_{u \in \Xi} I_\infty[t_0, h^0, u] = \int_0^\infty \Phi[x(t), u(t)]dt$.

Задача 1.2. Найти управление $u = u^0(t, x, y(\cdot)) : R \times R^n \times Q[-\tau, 0) \to R^r$, обеспечивающее минимум $I[t_0, h^0, u^0] = \min_{u \in \Xi} I[t_0, h^0, u] = \int_0^T \Phi[x(t, t_0, h^0, u), u(t)]dt$ ($T > t_0$ — заданный момент времени, $\|x^0(t_0)\|_H \leq \eta$.

Задача 1.3. Найти управление $u = u^0(t, x, y(\cdot)) : R \times R^n \times Q[-\tau, 0) \to R^r$, обеспечивающее минимум $I_\infty[t_0, h^0, u^0] = I_T = \min_{u \in \Xi} \int_0^T \Phi[x(t), u(t)]dt$, при $T \to \infty$.

Разрабатываемые методы будут использованы для решения задач управления и регуляции иммунными процессами при вирусных инфекциях человека (ВИЧ и инфекция SARS-CoV-2) [5–7]. В соответствующих моделях будут рассмотрены различные регуляторные контуры (обратная связь, связь с опережением, унимодальные и бимодальные отклики, интегральный контроль, репрессилятор и др.) [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект: 20-01-00352-а).

Библиографические ссылки

1. *Красовский Н.Н.* Оптимальные процессы в системах с запаздыванием // Доклад, представленный на Второй Международный конгресс ИФАК г. Базель, Швейцария (27 августа - 4 сентября 1963 г.) / Междунар. федерация по автомат. упр. (ИФАК). Нац. ком. Советского Союза по автомат. упр.; 11.
2. *Ким А.В.* i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.
3. *Kim A.V.* i-Smooth analysis. Theory and Applications. New Jersey: Wiley, 2015.
4. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физ.-мат. лит., 1959.
5. *Черешнев В.А., Бочаров Г.А., Ким А.В., Бажан С.И., Гайнова И.А., Красовский А.Н., Шмагель , Иванов А.В., Сафронов М.А., Третьякова Р.М.* Вве-

дение в задачи моделирования и управления динамикой ВИЧ инфекции. М.-Ижевск: АНО «Ижевский институт компьютерных исследований», 2016.

6. *Bocharov G., Casella V., Argilaguet J., Grebennikov D., Guerri-Fernandez R., Ludewig B., Meyerhans A.* Numbers game and immune geography as determinants of coronavirus pathogenicity // Frontiers in Cellular and Infection Microbiology. 2020. Vol. 10.

7. *Bocharov G.A., Grebennikov D.S., Savinkov R.S.* Mathematical immunology: from phenomenological to multiphysics modelling // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2020. Vol. 35. No. 4. P. 203–213.

ДОКАЗАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКОЙ И ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А.С. Антипин[1], Е.В. Хорошилова[2]

[1] ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия
asantip@yandex.ru

[2] МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
khorelena@gmail.com

На конечном отрезке времени $[t_0, t_1]$ рассматривается задача оптимального управления с линейной динамикой и непрерывными фазовыми ограничениями в виде неравенства. Терминальное условие на правом конце отрезка задано неявно как решение краевой задачи линейного программирования. Формально задача включает две компоненты: управляемую динамику и краевую задачу, и формулируется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1^*, \\ \qquad G(t)x(t) \le g(t),\ \ x(\cdot) \in \mathbb{AC}^n[t_0, t_1],\ u(\cdot) \in \mathrm{U}, \\ \qquad x_1^* \in \mathrm{Argmin}\{\langle \varphi_1, x_1\rangle |\ G_1 x_1 \le g_1,\ x_1 \subset \mathbb{R}^n\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $D(t), B(t), G(t)$ – непрерывные матрицы, φ_1, $g(t)$ – заданные вектор и непрерывная функция; $G(t_1) = G_1$, $g(t_1) = g_1$, x_0 также заданы; $\mathbb{AC}^n[t_0, t_1]$ есть линейное многообразие абсолютно непрерывных функций; $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^{\mathrm{T}}$ – траектория (фазовая переменная). Для каждого $t \in [t_0, t_1]$ вектором $u(t) = (u_1(t), ..., u_r(t))^{\mathrm{T}} \in \mathrm{U}$ обозначает управление, где $\mathrm{U} \in \mathbb{R}^r$ есть выпуклый компакт.