

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Н. Здрок

«02» июля 2021 г.

Регистрационный № УД – 40349/уч.



АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальностей:**

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направления специальности:

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность),

1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность),

1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность);

1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям)

Направления специальности:

1-31 03 08-01 Веб - программирование и интернет - технологии

1-31 03 08 -02 Математическое и программное обеспечение мобильных устройств

1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

Учебная программа составлена на основе типового учебного плана по специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям) № G 31-1-011/пр-тип, типового учебного плана по специальности 1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям) № G 31-1-012/пр-тип от 31.03.2021, типового учебного плана по специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ № G 31-1-021/пр-тип от 21.04.2021, и учебных планов: G31-1-003/уч, G31-1-016/уч., G31-1-004/уч., G31-1-019/уч., G31-1-011/уч., G31-1-017/уч. от 25.05.2021, G31-1-001/уч.ин., G31-1-004/уч.ин., G31-1-003/уч.ин., G31-1-010/уч.ин., G31-1-003/уч.з., G31-1-004/уч.з., G31-1-002/уч.з. от 31.05.2021.

СОСТАВИТЕЛИ:

Валерий Вацлавович Беньш-Кривец – заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Сергей Викторович Тихонов – доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Балащенко Виталий Владимирович, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета БГУ, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации БГУ
(протокол № 12 от 29.06.2021);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 7 от 30.06.2021)

Зав. кафедрой высшей алгебры
и защиты информации, профессор

В.В. Беньш-Кривец

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Алгебра и теория чисел» является базовой для преподавания большинства математических курсов. Цель дисциплины «Алгебра и теория чисел»: изложить основы современных алгебры и теории чисел.

Образовательная цель: обучить студентов фундаментальным методам общей алгебры, линейной алгебры, теории чисел; ознакомить с основными алгебраическими структурами — группами, кольцами и полями; создать базу для освоения основных понятий и методов современной математики.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления; знакомство с методами математических доказательств; изучение алгоритмов решения конкретных математических задач; привитие студентам умения самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Алгебра и теория чисел»:

1. ознакомить студентов с фундаментальными понятиями и методами линейной алгебры. Изучить матрицы и определители, методы решения систем линейных уравнений, теорию векторных пространств и линейных операторов, теорию квадратичных и билинейных форм;
2. дать введение в задачи и методы теории групп, теории колец и полей, а также теории чисел;
3. изучить комплексные числа и многочлены;
4. развить у студентов аналитическое мышление и общую математическую культуру;
5. привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Алгебра и геометрия» 1 государственного компонента для специальностей:

1-31 03 01 Математика (по направлениям), направления специальности 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность), 1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность), 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность);

1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям), направления специальности 1-31 03 08-01 Веб - программирование и интернет –

технологии, 1-31 03 08 -02 Математическое и программное обеспечение мобильных устройств;

и к модулю «Алгебра и геометрия» компонента учреждения высшего образования для специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина «Алгебра и теория чисел» является базовой для преподавания большинства математических курсов. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики».

Требования к компетенциям специалиста.

Освоение учебной дисциплины «Алгебра и теория чисел» должно обеспечить формирование следующих базовых профессиональных и специализированных компетенций:

– для специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям), направления специальности 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность), 1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность), 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность), и специальности 1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям) **базовые профессиональные** компетенции:

БПК-5. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы для решения теоретических и прикладных математических задач;

– для специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ **специализированные** компетенции:

СК-1. Применять основные алгебраические, геометрические и топологические понятия, конструкции и методы для решения теоретических и прикладных математических задач.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия и результаты линейной алгебры, теории билинейных и квадратичных форм, теории групп, колец и полей;
- методы доказательств важнейших результатов, изучаемых в рамках учебной дисциплины «Алгебра и теория чисел»;
- алгоритмы решения задач по алгебре;

уметь:

- выполнять действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме, извлекать корни из комплексных чисел, применять формулу Муавра;
- вычислять определители;
- выполнять операции над матрицами;
- решать системы линейных уравнений;
- находить базис векторного пространства, суммы и пересечения подпространств, координаты вектора в заданном базисе, находить ранг матрицы и системы векторов;
- находить собственные значения и собственные векторы матрицы и линейного оператора;
- приводить квадратичную форму к каноническому виду;
- приводить ортогональный оператор к каноническому виду;
- находить ортонормированный базис, ортогональное дополнение к подпространству;
- определять, является ли данное подмножество подгруппой в группе, подкольцом или идеалом в кольце, подполем в поле;
- производить вычисления в факторгруппе, факторкольце;

владеть:

- основными навыками решения задач, связанных с линейной алгеброй, многочленами, комплексными числами, квадратичными и билинейными формами, группами, кольцами и полями;
- методами доказательств основных теорем, встречающихся в курсе «Алгебра и теория чисел».
- навыками самообразования и способами использования аппарата алгебры и теории чисел для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 1, 2, 3 семестрах на дневной форме получения высшего образования и в 1, 2, 3, 4 семестрах на заочной форме получения высшего образования.

Очная форма получения высшего образования

На изучение учебной дисциплины для специальности 1-31 03 01 Математика (по направлениям), направления специальности 1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность), 1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность), 1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность), отводится всего 318 часов, в том числе аудиторных — 212 часов, из них лекции — 106 часов, лабораторные занятия — 90 часов, управляемая самостоятельная работа – 16 часов, из них:

1 семестр – всего 108 часов, в том числе аудиторных — 72 часа, из них лекции — 36 часов, лабораторные занятия — 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы;

2 семестр – всего 102 часа, в том числе аудиторных — 68 часов, из них лекции — 34 часа, лабораторные занятия — 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы;

3 семестр – всего 108 часов, в том числе аудиторных — 72 часа, из них лекции — 36 часов, лабораторные занятия — 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет во 2 и 3 семестре, экзамен в каждом семестре.

На изучение учебной дисциплины по специальностям 1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям) и 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ отводится всего 318 часов, в том числе аудиторных — 212 часов, из них лекции — 106 часов, практические занятия — 90 часов, управляемая самостоятельная работа – 16 часов, из них:

1 семестр – всего 108 часов, в том числе аудиторных — 72 часа, из них лекции — 36 часов, практические занятия — 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы;

2 семестр – всего 102 часа, в том числе аудиторных — 68 часов, из них лекции — 34 часа, практические занятия — 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы;

3 семестр – всего 108 часов, в том числе аудиторных — 72 часа, из них лекции — 36 часов, практические занятия — 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен в каждом семестре и зачет во 2 семестре по специальности 1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям).

Заочная форма получения высшего образования

На изучение учебной дисциплины по специальности 1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям) отводится всего 318 часов, в том числе аудиторных – 48 часов, из них лекции — 28 часов, практические занятия — 20 часов, из них:

установочная сессия – всего 60 часов, в том числе аудиторных — 16 часов, из них лекции — 10 часов, практические занятия — 6 часов;

1 семестр – всего 54 часа, в том числе аудиторных — 10 часов, из них лекции — 6 часов, практические занятия — 4 часа, контрольная работа №1; трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы;

2 семестр – всего 108 часов, в том числе аудиторных — 14 часов, из них лекции — 8 часов, практические занятия — 6 часов; трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы;

3 семестр – всего 64 часа, в том числе аудиторных — 8 часов, из них лекции — 4 часа, практические занятия — 4 часа, контрольная работа №2; трудоемкость учебной дисциплины составляет 2 зачетные единицы;

4 семестр – всего 32 часа; трудоемкость учебной дисциплины составляет 1 зачетную единицу.

Форма текущей аттестации – зачет в 3 семестре, экзамен в 1, 2, 4 семестре.

На изучение учебной дисциплины по направлению специальности 1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность) отводится всего 318 часов, в том числе аудиторных — 48 часов, из них лекции — 24 часа, лабораторные занятия — 24 часа, из них:

установочная сессия – всего 60 часов, в том числе аудиторных — 16 часов, из них лекции — 10 часов, лабораторные занятия — 6 часов;

1 семестр – всего 60 часов, в том числе аудиторных — 10 часов, из них лекции — 6 часов, лабораторные занятия — 4 часа, контрольная работа №1; трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы;

2 семестр – всего 108 часов, в том числе аудиторных — 14 часов, из них лекции — 4 часа, лабораторные занятия — 10 часов; трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы;

3 семестр – всего 60 часов, в том числе аудиторных — 8 часов, из них лекции — 4 часа, лабораторные занятия — 4 часа, контрольная работа № 2; трудоемкость учебной дисциплины составляет 2 зачетные единицы;

4 семестр – всего 30 часов; трудоемкость учебной дисциплины составляет 1 зачетную единицу.

Форма текущей аттестации – зачет во 2, 3 семестре, экзамен в 1, 2 и 4 семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Арифметика целых чисел. Сравнения.

Делимость целых чисел и ее свойства. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Простые числа. Основная теорема арифметики. Сравнения и их свойства. Классы вычетов. Функция Эйлера. Решение линейных сравнений от одной неизвестной. Китайская теорема об остатках.

Тема 2. Алгебраическая операция, основные алгебраические структуры.

Понятие и свойства алгебраической операции. Определения группы, кольца, поля. Примеры. Кольцо классов вычетов.

Тема 3. Поле комплексных чисел.

Алгебраическая форма комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы.

Тема 4. Матрицы и операции над ними.

Понятие матрицы. Операции над матрицами: сложение и умножение матриц, умножение матрицы на скаляр, транспонирование. Свойства операций над матрицами. Многочлен от матрицы.

Тема 5. Перестановки и подстановки.

Перестановки и подстановки. Инверсии и порядки в перестановке, четность перестановки. Транспозиции и циклы. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и произведение транспозиций, четность подстановки. Умножение подстановок и его свойства, симметрическая и знакопеременная группа.

Тема 6. Определители и их применение.

Определитель квадратной матрицы произвольного порядка и его свойства. Определитель транспонированной матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Определитель Вандермонда. Определитель произведения квадратных матриц. Обратная матрица. Полная линейная группа. Теорема Крамера.

Тема 7. Многочлены от одной и нескольких переменных.

Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Степень многочлена и ее свойства. Теорема о делении с остатком для многочленов. Наибольший общий делитель многочленов, алгоритм Евклида. Взаимно простые многочлены. Неприводимые многочлены. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители. Теорема Безу и следствия из нее. Схема Горнера. Производная многочлена и ее свойства. Кратность корня многочлена. Основная теорема алгебры. Каноническое разложение многочлена над полями комплексных и вещественных чисел. Многочлены от

многих переменных. Симметрические многочлены.

Тема 8. Векторные пространства.

Определение и примеры векторных пространств. Система образующих, конечномерные пространства. Линейная независимость векторов. Теорема Штейница о замене. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора. Подпространство, его размерность. Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей. Прямая сумма подпространств.

Тема 9. Системы линейных уравнений.

Матричная запись линейной системы. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Однородные системы, условие существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Задание подпространства векторного пространства системой линейных уравнений.

Тема 10. Линейные отображения векторных пространств.

Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект. Алгебраические действия над линейными отображениями: сумма, умножение на константу, композиция. Линейный оператор и его матрица. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов. Пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц. Условия обратимости оператора.

Тема 11. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц.

Инвариантное подпространство. Сужение оператора на инвариантное подпространство. Матрица оператора при наличии инвариантного подпространства, при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Собственное число и собственный вектор оператора. Характеристический многочлен оператора и матрицы. Теорема Гамильтона–Кэли. Оператор, имеющий диагональную матрицу в некотором базисе; признак диагонализуемости. Жорданова матрица.

Тема 12. Билинейные и квадратичные формы.

Билинейная форма на векторном пространстве, ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса, ранг формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы, их матрицы. Квадратичная форма и ее матрица, существование и единственность полярной билинейной формы. Канонический вид билинейной и квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Закон инерции вещественных квадратичных форм.

Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

Тема 13. Евклидовы пространства.

Определение евклидова пространства. Длина вектора, угол между векторами. Неравенство Коши–Буняковского. Ортогональные векторы. Ортогональные и ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение к подпространству. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора, расстояние от вектора до подпространства.

Тема 14. Линейные операторы евклидовых пространств.

Сопряженный оператор, его существование и свойства. Инвариантные подпространства для сопряженных операторов. Ортогональные операторы, их свойства. Критерий ортогональности оператора. Разложение пространства в прямую сумму 1- и 2-мерных попарно ортогональных инвариантных относительно ортогонального оператора подпространств. Канонический вид матрицы ортогонального оператора. Самосопряженные операторы, их свойства. Канонический вид матрицы самосопряженного оператора. Существование ортогонального преобразования, приводящего вещественную квадратичную форму к диагональному виду.

Тема 15. Введение в теорию групп.

Определение группы, подгруппы, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм. Порядок элемента группы. Циклические подгруппы. Циклические группы, их классификация. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Нормальная подгруппа. Факторгруппа. Основная теорема о гомоморфизмах групп. Прямое произведение групп.

Тема 16. Введение в теорию колец и полей.

Определение кольца, подкольца, поля, подполя, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм колец, ядро гомоморфизма. Идеалы колец. Факторкольца. Основная теорема о гомоморфизмах для колец. Прямое произведение колец. Характеристика поля. Простые поля. Степень расширения полей, конечные расширения. Мультипликативность степени. Алгебраические и трансцендентные элементы. Простые расширения полей. Алгебраически замкнутые поля, алгебраическое замыкание.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

для специальностей: **1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям)**

1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1 семестр							
1	Арифметика целых чисел. Сравнения	8	8				2	Устный опрос
2	Алгебраическая операция, основные алгебраические структуры	3	2					Контрольная работа
3	Поле комплексных чисел	6	6					Устный опрос
4	Матрицы и операции над ними	4	2				2	Коллоквиум
5	Перестановки и подстановки	3	2					Устный опрос
6	Определители и их применение	6	4				2	Устный опрос
7	Многочлены от одной и нескольких переменных	6	6					Устный опрос. Контрольная работа
	Всего за семестр	36	30				6	
	2 семестр							
8	Векторные пространства	10	10					Устный опрос

9	Системы линейных уравнений	6	4			2	Устный опрос. Контрольная работа
10	Линейные отображения векторных пространств.	8	8				Устный опрос. Коллоквиум
11	Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц	10	8			2	Устный опрос. Контрольная работа
	Всего за семестр	34	30			4	
	3 семестр						
12	Билинейные и квадратичные формы	8	6			2	Устный опрос Контрольная работа
13	Евклидовы пространства	6	6				Устный опрос
14	Линейные операторы евклидовых пространств	6	4			2	Устный опрос Коллоквиум
15	Введение в теорию групп	8	8				Устный опрос
16	Введение в теорию колец и полей	8	6			2	Устный опрос Контрольная работа
	Всего за семестр	36	30			6	
	Всего по курсу	106	90			16	

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

для специальности: **1 31 03 01 Математика (по направлениям)**, направления специальности: **1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность), 1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность), 1-31 03 01-03**

Математика (экономическая деятельность)

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1 семестр							
1	Арифметика целых чисел. Сравнения	8			8		2	Устный опрос
2	Алгебраическая операция, основные алгебраические структуры	3			2			Устный опрос Контрольная работа
3	Поле комплексных чисел	6			6			Устный опрос
4	Матрицы и операции над ними	4			2		2	Коллоквиум
5	Перестановки и подстановки	3			2			Устный опрос
6	Определители и их применение	6			4		2	Устный опрос
7	Многочлены от одной и нескольких переменных	6			6			Устный опрос Контрольная работа
	Всего за семестр	36			30		6	
	2 семестр							
8	Векторные пространства	10			10			Устный опрос
9	Системы линейных уравнений	6			4		2	Устный опрос Контрольная работа

10	Линейные отображения векторных пространств.	8			8			Устный опрос. Коллоквиум
11	Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц	10			8		2	Устный опрос. Контрольная работа
	Всего за семестр	34			30		4	
	3 семестр							
12	Билинейные и квадратичные формы	8			6		2	Устный опрос Контрольная работа
13	Евклидовы пространства	6			6			Устный опрос
14	Линейные операторы евклидовых пространств	6			4		2	Устный опрос Коллоквиум
15	Введение в теорию групп	8			8			Устный опрос
16	Введение в теорию колец и полей	8			6		2	Устный опрос. Контрольная работа
	Всего за семестр	36			30		6	
	Всего по курсу	106			90		16	

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
для специальности 1-31 03 08 Математика и информационные технологии
(по направлениям)

Заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное	
1	2	3	4	5	6	7	9
	Установочная сессия						
1	Арифметика целых чисел. Сравнения	2	2				Устный опрос
2	Алгебраическая операция, основные алгебраические структуры	2					Устный опрос
3	Поле комплексных чисел	3	2				Устный опрос
4	Матрицы и операции над ними	3	2				Устный опрос
	Всего	10	6				
	1 семестр						
5	Перестановки и подстановки	2					Устный опрос
6	Определители и их применение	2	2				Устный опрос
7	Многочлены от одной и нескольких переменных	2	2				контрольная работа 1
	Всего за 1 семестр	6	4				
	2 семестр						
8	Векторные пространства	2	2				Устный опрос
9	Системы линейных уравнений	2	2				Устный опрос

10	Линейные отображения векторных пространств.	2	1				Устный опрос
11	Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц	2	1				Устный опрос
	Всего за 2 семестр	8	6				
	3 семестр						
12	Билинейные и квадратичные формы	3	2				Устный опрос
13	Евклидовы пространства	3	1				Устный опрос
14	Линейные операторы евклидовых пространств	2	1				контрольная работа 2
	Всего за 3 семестр	4	4				
	Всего по курсу	28	20				

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

для специальности **1-31 03 01 Математика (по направлениям)**, направление специальности **1-31 03 01-02 Математика**

(научно-педагогическая деятельность)

Заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное	
1	2	3	4	5	6	7	9
	Установочная сессия						
1	Арифметика целых чисел. Сравнения	2			2		Устный опрос
2	Алгебраическая операция, основные алгебраические структуры	2					Устный опрос
3	Поле комплексных чисел	3			2		Устный опрос
4	Матрицы и операции над ними	3			2		Устный опрос
	Всего	10			6		
	1 семестр						
5	Перестановки и подстановки	2					Устный опрос
6	Определители и их применение	2			2		Устный опрос
7	Многочлены от одной и нескольких переменных	2			2		контрольная работа 1
	Всего за 1 семестр	6			4		
	2 семестр						
8	Векторные пространства	1			3		Устный опрос
9	Системы линейных уравнений	1			3		Устный опрос

10	Линейные отображения векторных пространств.	1			2		Устный опрос
11	Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц	1			2		Устный опрос
	Всего за 2 семестр	4			10		
	3 семестр						
12	Билинейные и квадратичные формы	2			1		Устный опрос
13	Евклидовы пространства	1			2		Устный опрос
14	Линейные операторы евклидовых пространств	1			1		контрольная работа 2
	Всего за 3 семестр	4			4		
	Всего по курсу	24			24		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Попов В.С. Линейная алгебра: учебное пособие. Москва: Издательство МГТУ, 2016. - 251 с.
2. Кочетков Е.С., Осокин А.В. Линейная алгебра: учебное пособие. Москва: Форум, 2016. - 414 с.
3. Пантина И.В., Куприянова М.А., Харитонов С.В. Алгебра и теория чисел: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению "Прикладная математика (по областям)". Москва: Синергия, 2019. - 155 с.
4. Лившиц К.И. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник для студентов вузов, обучающихся по направлению ВПО "Прикладная математика и информатика". Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2017. - 504 с.
5. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Ленанд, 2020.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Т. 1-3. М.: МЦНМО, 2020.
7. Беньш-Кривец В.В., Пунинский Г.Е. Лекции и семинары по алгебре: основные понятия алгебры и теории чисел. Минск: БГУ, 2015. 152 с. 116 с.
8. Беньш-Кривец В.В., Пунинский Г.Е. Лекции и семинары по алгебре: группы, кольца, поля. Минск: БГУ, 2015. 152 с.
9. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 1. Мн.: Амалфея, 2001.
10. Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 2. Мн.: Амалфея, 2001.
11. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. Мн.: Университетское, 1999.
12. Монахов В.С., Бузланов А.В. Алгебра и теория чисел: практикум. Минск: Изд. центр БГУ, 2007.
13. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2010.

Перечень дополнительной литературы

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2019.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: МЦНМО, 1998.
3. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.
4. Ван дер Варден Алгебра. М.: Наука, 1976.
5. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
6. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1972.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Формой текущей аттестации по дисциплине «Алгебра и теория чисел» учебным планом предусмотрен зачет и экзамен.

Контроль работы студента проходит в форме устного опроса, коллоквиума, выполнения контрольных и самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории. Задания к самостоятельным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Зачет по дисциплине выставляется в случае сдачи всех контрольных работ и коллоквиума. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Формирование оценки за текущую успеваемость: оценка является средним арифметическим оценок за устные опросы, контрольные работы и коллоквиум.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.).

2. ПОЛОЖЕНИЕ о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 189-ОД от 31.03.2020).

3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г. № 21-04-1/105).

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 40%, экзаменационная оценка – 60%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 1. Арифметика целых чисел. Сравнения. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Методом математической индукции докажите, что для любого натурального n число a делится на число b : а) $a = 6^{2^n} - 1, b = 35$; б) $a = 4^n + 15n - 1, b = 9$; в) $a = n^3 + 5n + 12, b = 6$.
2. Найдите неполное частное и остаток от деления числа a на число b : а) $a = 761, b = 13$; б) $a = 437, b = 24$.
3. С помощью алгоритма Евклида вычислите $\text{НОД}(a, b)$ и выразите его через исходные числа. Используя связь НОД и НОК двух натуральных чисел, вычислите $\text{НОК}(a, b)$: а) $a = 5544, b = 7644$; б) $a = 1188, b = 3080$; в) $a = 1296, b = 6600$.
4. С помощью канонических разложений чисел a, b, c найдите $\text{НОД}(a, b, c)$ и $\text{НОК}(b, c)$: а) $a = 6188, b = 88, c = -320$; б) $a = 1188, b = -132, c = -64$; в) $a = 9100, b = 92, c = -114$.
5. Решить в целых числах уравнение $1275x - 3796y = 1$.
6. Используя свойства сравнений, найти остаток от деления: а) $a = 178^{214}$ на $b = 22$; б) $a = 5^{50} + 13^{100}$ на $b = 18$.
7. Решите сравнение 1-й степени: а) $-3x \equiv 13 \pmod{4}$; б) $7x \equiv -12 \pmod{16}$.
8. Решить систему сравнений
$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{12} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$
.
9. Составьте таблицы сложения и умножения в кольце классов вычетов: а) \mathbf{Z}_5 ; б) \mathbf{Z}_6 .
10. Вычислите значение функции Эйлера для числа a : а) $a = 142560$; б) $a = 421200$.

Форма контроля – устный опрос.

Тема 4. Матрицы и операции над ними. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Две квадратные матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Докажите, что если матрицы B, C перестановочны с A , то $B + C$ и BC также перестановочны с A .
2. Доказать, что если матрицы A и B перестановочны, то
$$(A + B)^n = \sum_{i=1}^n C_n^i A^i B^{n-i}.$$

3. Вычислить BC и CB^T , где $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1 & 3i \end{pmatrix}$.

4. Вычислить AA^* и $f(B)$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1-2i & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$,
 $f(x) = -x^2 + 3x - 6$.

5. Для матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и полинома $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ вычислить $f(C)$.

6. С помощью элементарных преобразований найти матрицу C^{-1} , где
 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Используя явные формулы для обратной матрицы, вычислить C^{-1} , где
 $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Найти A^{-1} , где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Найти все матрицы X , перестановочные с данной матрицей $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Получающуюся при решении систему линейных уравнений решить методом Гаусса.

10. Пусть A – квадратная матрица порядка n , такая, что $A^2 = A$. Докажите, что $(2A - E_n)^2 = E_n$.

11. Найдите все квадратные матрицы порядка 2, такие, что A^2 – нулевая матрица.

12. Матрица S называется симметрической, если $S^T = S$. Докажите, что если A – произвольная квадратная матрица, то матрицы $A + A^T$, AA^T являются симметрическими.

13. Пусть A – обратимая квадратная матрица. Докажите, что $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Форма контроля – коллоквиум.

Тема 6. Определители и их применение. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. С каким знаком произведение $a_{25}a_{41}a_{36}a_{52}a_{13}a_{65}$ входит в определитель шестого порядка?
2. Выписать все миноры второго порядка, содержащиеся в 1-й и 3-й строках

матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, а также алгебраические дополнения к ним.

Пользуясь теоремой Лапласа, записать разложение $\det A$: а) по 1-й и 3-й строке; б) по 2-й строке.

3. Как изменится определитель порядка n , если его повернуть на 90° вокруг «центра» против часовой стрелки?

4. Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & a \\ z_2 & \bar{z}_2 & b \\ z_3 & \bar{z}_3 & c \end{vmatrix}$, где z_1, z_2, z_3 – комплексные, а a, b, c –

вещественные числа, является чисто мнимым числом.

5. С каким знаком входит в развернутое выражение определителя порядка n произведение элементов побочной диагонали?
6. Как изменится определитель порядка n , если каждый его элемент a_{ik} умножить на число c^{i-k} , где $c \neq 0$ – фиксированное число?
7. Чему равен определитель, у которого сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?
8. Найти наибольшее значение определителя третьего порядка, составленного из чисел 0 и 1.
9. Как изменится определитель квадратной матрицы, если каждый элемент матрицы заменить на противоположный?
10. Как изменится определитель квадратной матрицы, если его строки записать в обратном порядке?
11. Как изменится определитель квадратной матрицы, если первую строку поставить на место последней строки, а остальные строки сдвинуть вверх, не меняя их порядок?
12. Пусть A – квадратная матрица над полем \mathbb{C} комплексных чисел. Заменяя элементы матрицы A сопряженными комплексными числами, получим матрицу B . Как связаны между собой определители матриц A и B ?
13. Пусть все элементы матриц A и A^{-1} – целые числа. Чему равны определители этих матриц?
14. Найдите такие значения i, j, k , чтобы произведение $a_{2i}a_{41}a_{j3}a_{5k}a_{12}a_{64}$ входило в определитель матрицы шестого порядка со знаком минус.

15. Вычислите определители матриц $B = \begin{pmatrix} 3i & 1+i \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Вычислите определитель матрицы $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

17. Разложить определитель матрицы $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ по второй строке

и третьему столбцу.

Форма контроля – устный опрос.

Тема 9. Системы линейных уравнений. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Решите следующие системы, используя правило Крамера:

а) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = -8 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$.

2. Исследуйте системы на совместность. Совместные системы решите методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = -1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3ix_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - ix_2 + 2x_3 = i - 2 \\ -x_1 + 3x_2 - ix_3 = 3 \end{cases}$; в) $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 5$.

3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы

уравнений $AX = 0$, где а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 9 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 10 & 11 & 9 \\ -1 & -3 & -14 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -22 & -6 & -4 \\ 7 & 11 & -12 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A := \begin{bmatrix} 10 & 18 & 8 & 14 & 10 \\ -5 & -9 & -4 & -7 & -3 \\ 1 & 0 & -19 & -4 & -2 \\ 15 & 25 & -10 & 15 & 9 \end{bmatrix}$;

$$\text{г) } A := \begin{bmatrix} 13 & 23 & 6 & 17 & 13 \\ -6 & -11 & -7 & -9 & -5 \\ -7 & -14 & -21 & -14 & -8 \\ 11 & 19 & 0 & 13 & 7 \end{bmatrix}; \text{ д) } A = (1, 2, -1, 0, 3).$$

4. Линейную оболочку следующей системы векторов задайте системой линейных уравнений: а) $v_1 = (1, 1, 1, 1)$; б) $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3, 4)$; в) $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3, 4), v_3 = (1, 0, 1, 0)$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 11. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Нормальные формы матриц. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. В некотором базисе даны матрица A отображения f и векторы e_1, e_2, e_3 . Определить, какие из указанных векторов являются собственными

векторами отображения f : а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = (-1 \ 2 \ 0)$,

$e_2 = (1 \ 0 \ -3)$, $e_3 = (-4 \ 0 \ 1)$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $e_1 = (-1 \ 0 \ 1)$,

$e_2 = (1 \ 1 \ -1)$, $e_3 = (-3 \ 1 \ 1)$.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей A : а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Подобна ли матрица A диагональной матрице: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; б)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

4. Докажите, что вектор лежит в ядре линейного оператора тогда и только тогда, когда он является собственным и соответствует собственному значению нуль.
 5. Докажите, что при умножении линейного оператора на ненулевой скаляр множество собственных векторов не меняется, а собственные значения умножаются на этот скаляр.
 6. Найти жорданову нормальную форму матрицы: а) A^2 , где $A = \text{diag}(J_3(0), J_3(0))$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & J_3(0) \\ J_3(0) & 0 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 0 & J_3(0) \\ J_3(0) & 0 \end{pmatrix}$; г) $A = -J_4(0)^2$; д) $A = -J_4(1)^2$; е) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
 7. Выясните, являются ли подобными матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -25 & -10 \end{pmatrix}$.
 8. Докажите, что матрица A , обладающая свойством $A^k = E$ при некотором натуральном k , подобна диагональной матрице и найдите вид этой диагональной матрицы.
 9. Приведите пример двух неподобных матриц, характеристические и минимальные многочлены которых одни и те же.
- Форма контроля - контрольная работа.

Тема 12. Билинейные и квадратичные формы. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Пусть A – матрица невырожденной билинейной формы Φ на вещественном пространстве V размерности n , где n – нечетно. Существует ли другой базис V , в котором матрицей Φ является $-A$? Что будет в случае четного n ?
2. Доказать, что если $f(x), g(y)$ – линейные формы на векторном пространстве V , то отображение $\Phi: V \times V \rightarrow V$, $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$, является билинейной формой на V и $\text{rank } \Phi = 1$. Является ли Φ симметрической, кососимметрической?
3. Пусть Φ – билинейная форма на векторном пространстве V и пусть W – множество всех векторов $x \in V$ таких, что $\Phi(x, y) = 0$ для всех векторов $y \in V$. Доказать, что W – подпространство в V и справедлива формула $\text{rank } \Phi = \dim V - \dim W$.

4. Пусть Φ – билинейная форма на векторном пространстве V , V_1 – подпространство в V и Φ_1 – ограничение Φ на V_1 . Предположим, что Φ_1 – невырожденная билинейная форма. Доказать, что $\text{rank } \Phi \geq \dim V_1$.
5. Пусть Φ – билинейная форма на векторном пространстве V и $\text{rank } \Phi = 1$. Доказать, что существуют линейные формы $f(x), g(y)$ на векторном пространстве V такие, что $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$.
6. Пусть Φ – симметрическая билинейная форма на векторном пространстве V , а Φ_1 – кососимметрическая билинейная форма на V . Предположим, что $\Phi + \Phi_1 = 0$. Доказать, что $\Phi = \Phi_1 = 0$.
7. Найти полярную билинейную форму F для квадратичной формы $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$. Записать матрицу F . Вычислить $F(x, y)$, где $x = (1, i, 1)$, $y = (2, -1, -i)$.
8. Найти симметрическую билинейную форму Φ , ассоциированную с квадратичной формой $q(x) = F(x, x)$, где $F(x, y) = -x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_3$. Записать матрицу Φ . Вычислить $\Phi(x, y)$, где $x = (2, 1 - i, 0)$, $y = (0, -1, i)$.

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ некоторой билинейной формы $F(x, y)$.

Записать эту билинейную форму $F(x, y)$, а также соответствующую ей квадратичную форму $f(x) = F(x, x)$ и ее матрицу.

10. Привести квадратичную форму $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$ к каноническому виду над полями вещественных и комплексных чисел. Над полем \mathbb{R} найти ее положительный и отрицательный индекс инерции, сигнатуру и ранг.
11. Пусть p – положительный индекс инерции вещественной квадратичной формы и q – ее отрицательный индекс инерции. Пусть заданы положительные числа a_1, \dots, a_p и отрицательных чисел b_1, \dots, b_q . Доказать, что существует базис, в котором форма принимает вид $\sum_{i=1}^p a_i x_i^2 - \sum_{j=1}^q b_j x_{p+j}^2$.
12. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.
13. Выясните, какие из квадратичных форм $q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, $q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ эквивалентны между собой а) над \mathbb{R} ; б) над \mathbb{C} .
14. При каких значениях λ данная квадратичная форма положительно определена, отрицательно определена.

15. Найдите все значения λ , при которых квадратичная форма отрицательно определена.
16. При каких значениях λ квадратичная форма положительно определена, отрицательно определена.
17. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму.
18. При каких значениях λ квадратичная форма является положительно определенной?
19. Найти все значения λ , при которых квадратичная форма отрицательно определена.

Форма контроля - контрольная работа.

Тема 14. Линейные операторы евклидовых пространств. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Пусть преобразование f нильпотентно, т.е. $f^n = 0$ для некоторого $n > 0$. Доказать, что сопряженное преобразование f^* нильпотентно с тем же показателем нильпотентности n .
2. Доказать, что для двух преобразований f и g произведение $f^*g = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Im } f$ ортогонально $\text{Im } g$.
3. Пусть f – поворот плоскости на угол α . Найти сопряженное преобразование f^* .
4. Пусть \mathbf{a} – фиксированный вектор трехмерного геометрического пространства. Преобразование f сопоставляет каждому вектору \mathbf{x} векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$. Найти f^* .
5. Доказать, что преобразование f диагонализуемо тогда и только тогда, когда преобразование f^* диагонализуемо.
6. Доказать, что $\text{Im } f$ совпадает с ортогональным дополнением $(\text{Ker } f)^\perp$.
7. Пусть f, g – самосопряженные операторы евклидова пространства. Доказать, что самосопряженными будут также операторы:
1) $fg + gf$; 2) $af + bg$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$; 3) f^{-1} для невырожденного f .
8. Доказать, что произведение fg самосопряженных операторов f и g является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда f и g перестановочны.
9. Может ли матрица ненулевого самосопряженного оператора евклидова пространства в каком-либо ортонормированном базисе быть: а) кососимметричной; б) не симметричной?

10. Найти ортогональную матрицу C , приводящую данную симметрическую матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ к диагональному виду, и найти этот диагональный вид.
11. Доказать, что все собственные значения самосопряженного преобразования равны нулю тогда и только тогда, когда это – нулевое преобразование.
12. Найти все самосопряженные нильпотентные преобразования (оператор f нильпотентен, если $f^n = 0$ для некоторого $n > 0$).
13. Доказать, что для любых двух векторов одинаковой длины найдется ортогональное преобразование, переводящее первый вектор во второй.
14. Доказать, что для любых двух ортонормированных базисов евклидова пространства найдется ортогональный оператор, переводящий первый базис во второй.
15. Доказать, что преобразование $f^* f$ ортогонально тогда и только тогда, когда ортогонально f .
16. Пусть V – евклидово пространство строк со стандартным скалярным произведением, оператор f переводит векторы $a_1 = (4, 7)$, $a_2 = (2, 1)$ в векторы $b_1 = (8, 1)$, $b_2 = (2, -1)$. Является ли f ортогональным оператором?
17. Пусть e_1, e_2 – ортонормированный базис евклидова пространства V . Линейный оператор f переводит векторы e_1, e_2 в векторы $e_1 - e_2$ и $e_1 + e_2$. Является ли f ортогональным оператором?
18. Является ли сумма ортогональных операторов ортогональным оператором?
19. Является ли произведение ортогонального оператора на число ортогональным оператором?
20. Пусть f – самосопряженный ортогональный оператор евклидова пространства. Каковы собственные значения f ? Найти канонический вид матрицы f .

Форма контроля – коллоквиум.

Тема 16. Введение в теорию колец и полей. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Составить таблицу умножения в кольце \mathbb{Z}_5 .
2. Найдите все идеалы кольца $\mathbb{Z} / 12\mathbb{Z}$, факторкольца по которым являются полями.
3. Составить таблицы сложения и умножения в \mathbb{Z}_6 .
4. Найти все подкольца кольца $\mathbb{Z} / 15\mathbb{Z}$.
5. Найти все идеалы кольца $\mathbb{Z} / 21\mathbb{Z}$.
6. Найдите все подкольца кольца $\mathbb{Z} / 26\mathbb{Z}$.

7. Найдите все гомоморфизмы кольца $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ в себя.
8. Доказать, что если матрица $x \in M_n(K)$, где K – поле, перестановочна со всеми остальными матрицами, то x – скалярная матрица.
9. Пусть F – произвольное поле. Описать все идеалы кольца матриц $M_n(F)$.

10. Пусть
$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -w & z \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}, \quad K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbb{C} \right\}.$$

Проверить, что K_1, K_2 – кольца и $K_1 \cong K_2$.

11. Найти многочлен третьей степени, корнями которого являются кубы комплексных корней многочлена $x^3 - x - 1$.
12. Пусть K – множество всех $n \times n$ – матриц над \mathbb{C} , перестановочных с заданной матрицей A . Доказать, что K – кольцо.
Форма контроля - контрольная работа.

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа № 1.

1. Найти $z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}, \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$, где $z_1 = n + i, z_2 = 1 + ni, n$ – номер варианта.
2. Изобразить на плоскости комплексные числа $z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2}, z_1 - \overline{z_2}, z_1 + \overline{z_2}$, где z_1, z_2 – числа из задачи 1.
3. Вычислить: $\sqrt[3]{2 - i\sqrt{12}}$.
4. Вычислить $\alpha^{-1}, \alpha\beta, \alpha^{100n}$, где: $\alpha, \beta \in S_8$ – некоторые подстановки.
5. Вычислить AA' и $f(B)$, где $f(x) = x^2 - 2x + 1$, а A, B – заданные матрицы второго порядка.

Контрольная работа № 2.

1. Вычислить произведение подстановок и разложить его в произведение независимых циклов и произведение транспозиций:
(1, 2, 5, 6, 9)(2, 3, 4, 5, 9)(5, 6, 7, 8, 9).

2. Вычислить AB и BA , где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Выбрать i, j, k так, чтобы произведение $a_{2i} a_{44} a_{j5} a_{5k} a_{12} a_{64}$ входило в развернутое выражение определителя шестого порядка со знаком минус.
4. Вычислите определитель данной матрицы.

5. Найти матрицу, обратную к заданной матрице.

Контрольная работа № 3.

1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы уравнений $AX=0$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Найти базис суммы и пересечения подпространств, натянутых на системы векторов $a_1 := [10, 17, -3, 11], a_2 := [5, 12, -8, 6], b_1 := [-1, -2, -3, -2], b_2 := [1, 0, -1, 0]$.

3. Выяснить, является ли подпространством соответствующего векторного пространства следующая совокупность векторов: последовательности вещественных чисел, имеющие предел: 1) 0; 2) $a \neq 0$.

4. Является ли следующая система функций линейно независимой: $\sin x, \sin(x+1), \sin x + 2$?

5. При каких значениях x ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ равен: а) 1; б) 2.

Контрольная работа № 4.

1. Как изменится матрица линейного оператора, если в базисе e_1, \dots, e_n вектор e_1 заменить на $e_1 + e_2$?

2. Выяснить, является ли матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ диагонализируемой.

3. Доказать, что преобразование $f: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C}), f(X) = AX$, где A --- фиксированная матрица, является линейным. Найти матрицу f , а также собственные векторы, собственные значения и (по возможности) инвариантные подпространства f в случае, когда $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти жорданову нормальную форму матрицы A^2 , где $A = \text{diag}(J_3(0), J_3(0))$.

Контрольная работа № 5.

1. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

2. При каких значениях λ данная квадратичная форма положительно определена, отрицательно определена.

$$f(x) = \lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

3. С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки системы векторов $a_1 = (1, 2, -1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 2, 2)$, $a_3 = (-1, 2, 0, 2)$.
4. Найти ортогональную проекцию вектора v на подпространство W , ортогональную составляющую вектора v и расстояние от вектора v до подпространства W : $W = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3) \rangle$, $v = (4, -1, -3, 4)$.
5. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в пространстве \mathbb{R}^5 : $A = (2, 4, 2, 4, 2)$, $B = (6, 4, 4, 4, 6)$, $C = (5, 7, 5, 7, 2)$.

Контрольная работа № 6.

1. Обозначим через G множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 3b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, a и b одновременно не равны нулю. Доказать, что G является подгруппой в $GL_2(\mathbb{Q})$.
2. Найти разложение Лагранжа в левые смежные классы циклической группы $G = \langle a \rangle$ порядка 18 по циклической подгруппе $H = \langle a^{12} \rangle$.
3. В группе \mathbb{R}^* найти порядок элемента $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.
4. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — различные вещественные числа. Доказать, что отображение $\Psi: R[x] \rightarrow R^n$, $\Psi(f(x)) = (f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n))$ является гомоморфизмом. Найти ядро Ψ .
5. Доказать, что в факторгруппе C^*/T , где $T = \{z \in C \mid |z| = 1\}$, все неединичные элементы имеют бесконечный порядок.

Примерная тематика практических/ лабораторных занятий 1 семестр

1. Делимость целых чисел и ее свойства. Наибольший общий делитель.
2. Алгоритм Евклида. Простые числа. Основная теорема арифметики.
3. Сравнения и их свойства. Классы вычетов.
4. Функция Эйлера. Решение линейных сравнений от одной неизвестной. Китайская теорема об остатках.
5. Понятие и свойства алгебраической операции. Определения группы, кольца, поля. Кольцо классов вычетов.
6. Алгебраическая форма комплексных чисел.
7. Тригонометрическая форма комплексных чисел.
8. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из единицы.

9. Операции над матрицами и их свойства. Многочлен от матрицы. Специальные виды матриц.
10. Перестановки и подстановки. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и произведение транспозиций, четность подстановки. Умножение подстановок и его свойства.
11. Определитель квадратной матрицы произвольного порядка и его свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
12. Определитель Вандермонда. Обратная матрица. Теорема Крамера.
13. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Теорема о делении с остатком для многочленов. Наибольший общий делитель многочленов, алгоритм Евклида.
14. Теорема о разложении многочлена на неприводимые множители. Теорема Безу и следствия из нее. Схема Горнера. Производная многочлена и ее свойства. Кратность корня многочлена.
15. Основная теорема алгебры. Каноническое разложение многочлена над полями комплексных и вещественных чисел. Многочлены от многих переменных. Симметрические многочлены.

2 семестр

1. Определение и примеры векторных пространств. Система образующих, конечномерные пространства. Линейная независимость векторов.
2. Теорема Штейница о замене. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса.
3. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора. Подпространство, его размерность.
4. Ранг системы векторов. Ранг матрицы.
5. Сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей. Прямая сумма подпространств.
6. Матричная запись линейной системы. Метод Гаусса. Однородные системы, условие существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений.
7. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Задание подпространства векторного пространства системой линейных уравнений.
8. Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект.
9. Алгебраические действия над линейными отображениями: сумма, умножение на константу, композиция. Линейный оператор и его матрица.
10. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов.
11. Пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц. Условия обратимости оператора.
12. Инвариантное подпространство. Матрица оператора при наличии инвариантного подпространства, при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств.
13. Собственное значение и собственный вектор оператора. Характеристический многочлен оператора и матрицы.

14. Теорема Гамильтона–Кэли. Оператор, имеющий диагональную матрицу в некотором базисе; признак диагонализуемости.

15. Жорданова матрица. Жорданова нормальная форма матрицы.

3 семестр

1. Билинейная форма на векторном пространстве, ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса, ранг формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы, их матрицы.
2. Квадратичная форма и ее матрица, существование и единственность полярной билинейной формы. Канонический вид билинейной и квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
3. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.
4. Определение евклидова пространства. Длина вектора, угол между векторами. Неравенство Коши–Буняковского.
5. Ортогональные векторы. Ортогональные и ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение к подпространству.
6. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора, расстояние от вектора до подпространства.
7. Сопряженный оператор, его существование и свойства. Ортогональные операторы, их свойства. Критерий ортогональности оператора.
8. Канонический вид матрицы ортогонального оператора. Самосопряженные операторы, их свойства. Канонический вид матрицы самосопряженного оператора.
9. Определение группы, подгруппы, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм.
10. Порядок элемента группы. Циклические подгруппы. Циклические группы, их классификация. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы.
11. Теорема Лагранжа и следствия из нее. Нормальная подгруппа. Факторгруппа.
12. Основная теорема о гомоморфизмах групп. Прямое произведение групп.
13. Определение кольца, подкольца, поля, подполя, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм колец, ядро гомоморфизма.
14. Идеалы колец. Факторкольца. Основная теорема о гомоморфизмах для колец. Прямое произведение колец.

15. Степень расширения полей. Алгебраические и трансцендентные элементы. Простые расширения полей.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Алгебра и теория чисел» используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, экзамену, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

При составлении индивидуальных заданий по учебной дисциплине задания располагаются в порядке возрастания их сложности: задания, формирующие достаточные знания по изученному учебному материалу на уровне узнавания; задания, формирующие компетенции на уровне воспроизведения; задания, формирующие компетенции на уровне применения полученных знаний.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1 семестр

1. Свойства делимости целых чисел. Теорема о делении с остатком. НОД целых чисел. Алгоритм Евклида.
2. Теорема о представлении НОД целых чисел в виде целочисленной линейной комбинации. Нахождение НОД нескольких целых чисел.
3. Взаимно простые числа. Критерий взаимной простоты. НОК целых чисел.
4. Простые числа, их свойства. Основная теорема арифметики.
5. Сравнения и их свойства.
6. Классы вычетов по модулю n , их свойства. Полная система вычетов.
7. Функция Эйлера, ее мультипликативность и вычисление.
8. Теоремы Эйлера и Ферма.
9. Решение линейных сравнений.
10. Алгебраическая операция, ее свойства. Примеры. Ассоциативность.
11. Теоремы о нейтральном и обратном элементе.
12. Группа, кольцо, поле. Определения и примеры.
13. Кольцо классов вычетов Z_m .
14. Обратимые элементы в Z_m . Критерий того, что Z_m — поле.
15. Определение комплексных чисел, операции сложения и умножения и их свойства. Алгебраическая форма комплексных чисел.
16. Операция сопряжения комплексных чисел и ее свойства.
17. Комплексная плоскость, тригонометрическая форма комплексных чисел. Модуль комплексного числа, его свойства.
18. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
19. Геометрическая интерпретация действий над комплексными числами.
20. Извлечение корней из комплексных чисел.
21. Корни из единицы. Первообразные корни из единицы и их свойства.
22. Определения перестановок и подстановок, их число. Транспозиции и циклы. Четность перестановки.
23. Теорема о характере четности перестановки после применения к ней транспозиции.
24. Умножение подстановок. Симметрическая группа.
25. Разложение подстановки в произведение транспозиций.
26. Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
27. Матрицы и действия над ними. Умножение матрицы на число и его свойства.
28. Свойства сложения матриц. Операция транспонирования и ее свойства.

29. Свойства умножения матриц.
30. Определители. Теорема о замене строк в определителе.
31. Свойства определителей порядка n .
32. Теорема об определителе произведения матриц.
33. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
34. Теорема о разложении определителя по строке.
35. Определитель Вандермонда.
36. Обратная матрица. Критерий существования и методы вычисления.
37. Свойства обратной матрицы.
38. Системы линейных уравнений. Метод Крамера.
39. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.
40. Кольцо многочленов от одной переменной. Степень многочлена и ее свойства.
41. Теорема о делении многочленов с остатком.
42. Делимость многочленов и ее свойства. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
43. Теорема о представлении НОД многочленов в виде линейной комбинации. Взаимно простые многочлены. Критерий взаимной простоты.
44. Неприводимые многочлены и их свойства.
45. Разложение многочлена на неприводимые множители.
46. Кратные множители многочлена.
47. Корни многочленов. Теорема Безу и ее следствия. Кратные корни.
48. Схема Горнера.
49. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
50. Неприводимые многочлены над C и R . Каноническое разложение многочленов из $C[x]$ и $R[x]$.

2 семестр

1. Векторные пространства. Определение и примеры. Простейшие свойства векторных пространств.
2. Линейная зависимость и линейная независимость. Примеры. Свойства линейной зависимости. Критерии линейной зависимости.
3. Базис векторного пространства. Примеры.
4. Эквивалентные системы векторов. Лемма Штейница.
5. Размерность векторного пространства. Свойства n -мерных векторных пространств.
6. Координаты вектора. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода.
7. Элементарные преобразования систем векторов.

8. Изоморфизмы векторных пространств и их свойства. Критерий изоморфности векторных пространств.
9. Подпространства векторного пространства. Примеры
10. Операции над подпространствами.
11. Размерности суммы и пересечения подпространств.
12. Прямая сумма подпространств. Критерии.
13. Прямое дополнение.
14. Базис и ранг системы векторов. Ранг матрицы.
15. Теорема о ранге матриц.
16. Ранг произведения двух матриц.
17. Методы вычисления ранга матрицы.
18. Критерий совместности системы линейных уравнений.
19. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
20. Задание подпространства системой уравнений. Связь решений однородной и неоднородной систем.
21. Линейные отображения. Примеры.
22. Простейшие свойства линейных отображений.
23. Теорема о продолжении отображения базиса.
24. Действия над линейными отображениями.
25. Матрица линейного оператора.
26. Матрица суммы и произведения операторов.
27. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
28. Ядро и образ и линейного отображения.
29. Нахождение ядра линейного оператора. Теорема о ранге и дефекте.
30. Инвариантные подпространства. Определение и примеры.
31. Сумма и пересечение инвариантных подпространств. Инвариантные подпространства и матрица линейного оператора.
32. Собственные векторы и собственные значения. Определения и примеры.
33. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Подпространство V_λ .
34. Нахождение собственных значений.
35. Теорема Гамильтона – Кэли.
36. Минимальный полином матрицы и оператора.
37. Определение жордановой нормальной формы и канонического базиса. Нахождение ЖНФ матрицы.

3 семестр

1. Билинейные формы. Примеры. Матрица билинейной формы. Симметрические билинейные формы и их матрицы.

2. Теорема об изменении матрицы билинейной формы при переходе к другому базису. Ранг билинейной формы и его независимость от выбора базиса.
3. Квадратичные формы. Полярная билинейная форма для данной квадратичной формы. Теорема о существовании и единственности полярной билинейной формы
4. Матрица квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису. Ранг квадратичной формы и его независимость от выбора базиса.
5. Канонический базис относительно билинейной (квадратичной) формы и канонический вид билинейной (квадратичной) формы. Матрица билинейной (квадратичной) формы в каноническом базисе. Алгоритм Лагранжа.
6. Нормальный вид комплексной квадратичной формы.
7. Нормальный вид действительной квадратичной формы. Закон инерции действительных квадратичных форм. Положительный и отрицательный индексы инерции.
8. Знакоопределенные квадратичные формы. Канонический вид положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра.
9. Евклидовы пространства. Длина вектора.
10. Неравенство Коши-Буняковского.
11. Неравенство треугольника. Угол между векторами в евклидовом пространстве.
12. Ортогональные векторы в евклидовом (унитарном) пространстве и их свойства. Теорема о линейной независимости системы попарно ортогональных ненулевых векторов.
13. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональное дополнение к подпространству. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
14. Теорема о разложении евклидова векторного пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
15. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства, их нахождение.
16. Связь между ортонормированными базисами евклидова векторного пространства.
17. Оператор, сопряженный к данному оператору евклидова пространства. Теорема о существовании и единственности сопряженного оператора. Матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе.
18. Свойства сопряженного оператора пространства. Теорема об инвариантных подпространствах.
19. Ортогональные операторы. Невырожденность ортогонального оператора. Образ ортонормированного базиса относительно ортогонального оператора.

20. Критерий ортогональности оператора. Матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе.
21. Инвариантные подпространства ортогонального оператора.
22. Собственные значения ортогонального оператора. Ортогональные операторы 1 и 2-мерных векторных пространств.
23. Теорема о каноническом виде матрицы ортогонального оператора. Следствие для ортогональных матриц.
24. Самосопряженные операторы евклидовых векторных пространств. Матрица самосопряженного оператора. Свойство ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно самосопряженного оператора.
25. Теорема об одномерном подпространстве, инвариантном относительно самосопряженного оператора евклидова векторного пространства, Следствия.
26. Теорема о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора. Следствие для симметрических матриц.
27. Приведение действительной квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования координат.
28. Определение группы, подгруппы. Примеры.
29. Порядок элементов группы, его свойства. Циклические подгруппы, их порядок.
30. Циклические группы. Их классификация.
31. Подгруппы циклической группы.
32. Смежные классы. Их свойства. Критерий равенства смежных классов. Индекс подгруппы.
33. Теорема Лагранжа и следствия из нее.
34. Гомоморфизмы и изоморфизмы групп, их свойства.
35. Нормальные подгруппы. Примеры. Нормальность ядра гомоморфизма.
36. Факторгруппа. Канонический гомоморфизм.
37. Основная теорема о гомоморфизмах групп.
38. Прямое произведение групп.
39. Определения кольца, подкольца, поля, подполя. Примеры.
40. Гомоморфизм и изоморфизм колец. Их свойства. Ядро гомоморфизма.
41. Идеал кольца. Примеры. Ядро гомоморфизма колец – идеал.
42. Факторкольцо.
43. Основная теорема о гомоморфизмах колец.
44. Прямое произведение колец.
45. Характеристика поля. Простое поле.
46. Степень расширения полей. Мультипликативность степени. Конечные расширения.
47. Алгебраические и трансцендентные элементы.
48. Простые расширения полей.

49. Алгебраически замкнутые поля, алгебраическое замыкание.

Примерный перечень вопросов к зачету

На зачете по дисциплине «Алгебра и теория чисел» студент должен продемонстрировать умение решать следующие задачи и объяснять свои действия с точки зрения теории.

1 семестр

1. Найти НОД (НОК) целых чисел с помощью алгоритма Евклида.
2. Комплексное число представить в тригонометрической форме.
3. Изображать на комплексной плоскости комплексные числа и множества комплексных чисел, заданные их свойствами.
4. Осуществлять действия над комплексными числами: сложение, умножение, возведение в степень, извлечение корня.
5. Бинарная алгебраическая операция, определение группы, кольца, поля.
6. Находить количество инверсий в перестановках.
7. Перемножать подстановки. Разлагать подстановку в произведение транспозиций и независимых циклов.
8. Считать простейшие определители по определению.
9. Пользуясь теоремой Лапласа, раскладывать определитель по одной или нескольким строкам (столбцам).
10. Вычислять числовые определители.
11. Решать системы линейных уравнений методом Гаусса.
12. Выполнять действия с матрицами. Находить обратную матрицу (два способа).
13. Решать крамеровские системы линейных уравнений.
14. Найти НОД (НОК) полиномов из $P[x]$.

2 семестр

1. Определять линейную зависимость и линейная независимость системы векторов.
2. Находить базис системы векторов и базис векторного пространства.
3. Находить координаты вектора в заданном базисе.
4. Находить матрицу перехода между базисами.
5. Уметь определять, является ли некоторое подмножество векторного пространства подпространством.
6. Находить базис суммы и пересечения подпространств.
7. Определять, является ли сумма подпространств прямой.
8. Вычислять ранг системы векторов и ранг матрицы
9. Знать и уметь применять критерий совместности системы линейных уравнений.

10. Уметь находить фундаментальную систему решений системы однородных линейных уравнений.
11. Уметь задать подпространство системой линейных уравнений.
12. Уметь определять линейность отображения.
13. Уметь вычислить матрицу линейного оператора.
14. Уметь вычислить ядро линейного отображения.
15. Выяснить инвариантность подпространства.
16. Уметь находить собственные векторы и собственные значения матрицы и линейного оператора.
17. Уметь записать жорданову нормальную форму матрицы.

3 семестр

1. Найти матрицу билинейной и квадратичной формы в разных базисах.
2. С помощью алгоритма Лагранжа найти канонический вид билинейной и квадратичной формы.
3. Привести вещественную и комплексную квадратичную форму к нормальному виду.
4. Найти положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатуру квадратичной формы.
5. Применять критерий Сильвестра для выяснения знакоопределенности квадратичной формы.
6. Уметь выяснить, является ли вещественное пространство евклидовым относительно заданной билинейной формы.
7. Уметь вычислить скалярное произведение векторов, длину векторов, угол между векторами.
8. Уметь строить ортонормированные семейства векторов с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта.
9. Уметь находить ортогональное дополнение к подпространству, заданному одним из двух способов: а) как линейная оболочка системы векторов; б) как пространство решений однородной системы линейных уравнений.
10. Уметь найти сопряженный оператор для заданного оператора.
11. Уметь находить канонический вид ортогонального оператора.
12. Уметь находить канонический вид самосопряженного оператора.
13. Уметь приводить вещественную квадратичную форму к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования координат.
14. Уметь определять, является ли множество с заданными операциями группой, кольцом, полем.
15. Уметь определять, является ли заданное отображение гомоморфизмом групп, колец.
16. Уметь вычислить порядок элемента группы.

17. Уметь вычислить циклическую подгруппу, порожденную заданным элементом.
18. Уметь вычислять смежные классы группы по подгруппе, индекс подгруппы.
19. Знать и уметь применять теорему Лагранжа и следствия из нее.
20. Уметь определить, является ли заданная подгруппа нормальной.
21. Уметь выполнять действия в факторгруппе, факторкольце.
22. Уметь определять, является ли данное подмножество идеалом кольца.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Аналитическая геометрия	Кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 29.06.2021)
Теория функций комплексного переменного	Кафедра теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (протокол 12 от 29.06.2021)
Математический анализ	Кафедра теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 29.06.2021)
Дифференциальные уравнения	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 29.06.2021)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей алгебры и защиты информации (протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой

(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)