ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А. А. Карпечина

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Рассмотрим задачу Коши для однородного телеграфного уравнения с переменным коэффициентом

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(t,x)u = 0,\ (t,x) \in Q = (0,\infty) \times \mathrm{R}, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), x \in \mathrm{R}, \tag{2}$$

где $\varphi(x) \in C^2(\mathrm{R}), \psi(x) \in C(\mathrm{R})$ и найдем ее решение.

Найдем решение уравнения (1). Заменой $\xi = x + at, \eta = x - at$ уравнение (1) приводится к виду

$$\partial^2{}_{\xi\eta} v(\xi,\eta) - \widetilde{b}(\xi,\eta) v(\xi,\eta) = 0, \tag{3}$$

где $\tilde{b}(\xi,\eta) = -\frac{1}{4a^2} b(\xi,\eta) = -\frac{1}{4a^2} c(t,x).$

Интегрируя (3), получим уравнение для нахождения функции $v(\xi,\eta)$

$$v(\xi,\eta) = \int_0^{\xi}\int_0^{\eta} \widetilde{b}(y,z) v(y,z) dydz + f(\xi) + g(\eta), \tag{4}$$

где $f(\xi)$, $\mathrm{g}(\eta)$ – произвольные функции.

Решаем уравнение (4) методом последовательных приближений при начальном приближении $v_0(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$. После перехода в полученной функции v_n к пределу при $n \to \infty$ и возвращения к независимым переменным x и t получим решение уравнения (1) в виде

$$u(t,x) = f(x+at) + g(x-at) + \int_0^{x+at} f(y) \int_0^{x-at} \tilde{b}(y,z) dzdy +$$

$$+ \int_0^{x-at} g(z) \int_0^{x+at} \tilde{b}(y,z) dydz +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{x+at} f(y)\int_{0}^{x-at}\tilde{b}(y,z)B^{n}(\tilde{b};x+at,x-at;y,z)dzdy+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{x-at} g(z)\int_{0}^{x+at}\tilde{b}(y,z)B^{n}(\tilde{b};x+at,x-at;y,z)dydz. \tag{5}$$

где

$$B^{j}(\tilde{b};\xi,\eta;y,z)=\int_{y}^{\xi}\int_{z}^{\eta}\tilde{b}(y_1,z_1)\int_{y}^{y_1}\int_{z}^{z_1}\tilde{b}(y_2,z_2)...\int_{y}^{y_{j-1}}\int_{z}^{z_{j-1}}\tilde{b}(y_j,z_j)dy_j dz_j...dy_1 dz_1,$$
$$j=1,...,n-1. \tag{6}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Рассматриваем случай $\tilde{b}(y,\tau)=\tilde{b}(\tau,y)$. После подстановки решения (5) в начальные условия и проведения некоторых преобразований получим систему интегральных уравнений

$$(f+g)(x)+\int_{0}^{x}(f+g)(y)\int_{0}^{x}\tilde{b}(y,z)dzdy+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{x}(f+g)(y)\int_{0}^{x}\tilde{b}(y,z)B^{n}(\tilde{b};x,x;y,z)dzdy=\varphi(x), \tag{7}$$

$$(f-g)(x)+\int_{0}^{x}(f-g)(y)\Big(\int_{0}^{y}\tilde{b}(y,z)dz-\int_{y}^{x}\tilde{b}(y,z)dz\Big)dy+\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}(f+$$
$$+g)(z)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{y}\tilde{b}(\tau,z)[B_1^{\,n}(\tilde{b},y,\tau,z)-B_2^{\,n}(\tilde{b},y,\tau,z)]d\tau dzdy=\frac{1}{a}\int_{0}^{x}\psi(y)dy+C, \tag{8}$$

где

$$B_1^{\,n}(\tilde{b},x,y,z)=\frac{\partial B^{n}(\tilde{b};x+at,x-at;y,z)}{\partial(x+at)}, \tag{9}$$

$$B_2^{\,n}(\tilde{b},x,y,z)=\frac{\partial B^{n}(\tilde{b};x+at,x-at;y,z)}{\partial(x-at)}. \tag{10}$$

Из системы (7)-(8) функций $f(x)$ и $g(x)$ находятся в виде

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(M^{(n)}(x,\tilde{\psi},\tilde{\mathrm{b}})+K^{(n)}(x,y,z))+\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(x,\xi,\eta,\varphi,\tilde{b})+C\right],$$
$$g(x)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(K^{(n)}(x,y,z)-M^{(n)}(x,\tilde{\psi},\tilde{\mathrm{b}}))-\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(x,\xi,\eta,\varphi,\tilde{b})-C\right], \quad (11)$$

где

$$\tilde{\psi}(x)=\int_0^y\psi(y)dy,$$

$$F^{(1)}(x,\xi,\eta,\varphi,\tilde{b})=\int_0^x\int_0^y(\varphi(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nK^{(n)}(z,\xi,\eta))\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^y\tilde{b}(\tau,z)[B_1{}^m(\tilde{b},y,\tau,z)-$$
$$-B_2{}^m(\tilde{b},y,\tau,z)]d\tau dzdy,$$

$$F^{(n)}(x,\xi,\eta,\varphi,\tilde{b})=\int_0^xF^{(n-1)}(y,\xi,\eta,\varphi,\tilde{b})(\int_0^y\tilde{b}(y,z)dz-\int_y^x\tilde{b}(y,z)dz)dy,$$

$$M^{(0)}(x,\tilde{\psi},\tilde{b})=\frac{1}{a}\tilde{\psi}(x),$$

$$M^{(n)}(x,\tilde{\psi},\tilde{b})=\int_0^xM^{(n-1)}(y,\tilde{\psi},\tilde{b})(\int_0^y\tilde{b}(y,z)dz-\int_y^x\tilde{b}(y,z)dz)dy,$$

$$K^{(0)}(x,y,z)=\varphi(x),$$

$$K^{(n)}(x,y,z)=\int_0^xK^{(m-1)}(y,y_1,z)\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{b}(y,z)B^n(\tilde{b};x,x;y,z)dzdy,$$

$B_1{}^m$ определяется из (9), $B_2{}^m$ – из (10), $B^n(\tilde{b};\xi,\eta;y,z)$ – из (6).

Тогда решение задачи Коши (1), (2) представляется в виде (5), где функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют представление (11).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Решение задачи Коши для неоднородного телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+c(t,x)u=f(t,x),\ (t,x)\in Q=(0,\infty)\times\mathrm{R}, \quad (12)$$

с условиями (2) ищем по методу Дюамеля в виде

$$u(t,x) = \tilde{u}(t,x) + v(t,x), \tag{13}$$

где $\tilde{u}(t,x)$ – решение задачи (1), (2), $v(t,x)$ – решение задачи Коши для неоднородного уравнения вида (12) с нулевыми начальными условиями.

Согласно методу Дюамеля решение задачи для уравнения вида (12) с нулевыми начальными условиями представимо в виде

$$v(t,x) = \int_0^t w(t-\tau,\tau,x)d\tau, \tag{14}$$

где функция $w(t,\tau,x)$ – решение вспомогательной задачи

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t,\tau,x) - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,\tau,x) + c(t,x)w(t,\tau,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times \mathrm{R}, \tau > 0, \tag{15}$$

$$w\big|_{t=0} = 0, \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = f(\tau,x), x \in \mathrm{R}, \tau>0. \tag{16}$$

Функция $\tilde{u}(t,x)$ и решение $w(t,\tau,x)$ задачи (15)–(16) получены в виде (5) с помощью (11). Решение задачи (12), (2) вычисляется по формуле (13).

Таким образом, было найдено общее решение телеграфного уравнения с переменным коэффициентом, а также решение задачи Коши для однородного и неоднородного телеграфного уравнения.

Литература

1. *Корзюк В. И., Чеб Е. С., Ширма М. С.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения колебания струны. // Доклады НАН Беларуси. Т.53, №1. 2009. С.45 – 49
2. *Корзюк В. И., Чеб Е. С., Ширма М. С.* Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения методом характеристик // Труды Института математики. 2009. Т. 17. №2. С. 23 – 34