

УДК 519.676

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИИ И ТЕСТИРОВАНИЕ В ИЗОЛИРОВАННОМ КОНТИНГЕНТЕ

А. В. ЧИГАРЕВ¹⁾, М. А. ЖУРАВКОВ¹⁾, В. А. ЧИГАРЕВ²⁾

¹⁾Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Белорусский национальный технический университет,
пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Беларусь

Представлено обобщение математической модели SIR динамики развития инфекционного процесса путем добавления модели тестирования, что требует расширения размерности пространства состояний за счет переменных, которые не могут быть измерены непосредственно, но позволяют более адекватно описать процессы, имеющие место в реальных ситуациях. Дальнейшее обобщение модели SIR рассматривается на основе учета случайности в оценках состояния, прогнозировании, что достигается благодаря использованию методов стохастических дифференциальных уравнений, связанных с применением уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова для апостериорных вероятностей. Как показала практика COVID-19, широкое использование современных средств идентификации, диагностики и мониторинга не гарантирует получение адекватной информации о состоянии индивидуумов в популяции. При моделировании реальных эпидемических процессов на начальных стадиях целесообразно

Образец цитирования:

Чигарев АВ, Журавков МА, Чигарев ВА. Детерминированные и стохастические модели распространения инфекции и тестирование в изолированном контингенте. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2021;3:57–67.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-57-67>

For citation:

Chigarev AV, Zhuravkov MA, Chigarev VA. Deterministic and stochastic models of infection spread and testing in an isolated contingent. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;3:57–67. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-57-67>

Авторы:

Анатолий Власович Чигарев – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.
Михаил Анатольевич Журавков – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики механико-математического факультета.
Виталий Анатольевич Чигарев – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры теоретической механики и механики материалов машиностроительного факультета.

Authors:

Anatoliy V. Chigarev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
chigarevanatoli@yandex.ru
Michael A. Zhuravkov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mechanics and mathematics.
zhuravkov@bsu.by
Vitaliy A. Chigarev, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of theoretical and structural mechanics, faculty of engineering.



применять методы эвристического моделирования, а затем уточнять модель с помощью методов математического моделирования, используя стохастические и неопределенно-нечеткие методы, позволяющие учитывать то, что протекание процессов, принятие решений и управление происходят в системах с неполной информацией. Для разработки более реалистичных моделей необходим учет пространственной кинетики, что, в свою очередь, требует использования моделей систем с распределенными параметрами (например, моделей механики сплошных сред). Очевидно, что реалистичные модели эпидемий и борьбы с ними должны включать экономические модели, а также модели социодинамики. Задачи прогнозирования эпидемий и их развития окажутся не менее сложными, чем задачи прогнозирования изменения климата, предсказания землетрясений, прогноза погоды.

Ключевые слова: математическая модель; эпидемия; оценивание; апостериорная вероятность; модель SIR.

DETERMINISTIC AND STOCHASTIC MODELS OF INFECTION SPREAD AND TESTING IN AN ISOLATED CONTINGENT

A. V. CHIGAREV^a, M. A. ZHURAVKOV^a, V. A. CHIGAREV^b

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bBelarusian National Technical University, 65 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220013, Belarus

Corresponding author: A. V. Chigarev (chigarevanatoli@yandex.ru)

The mathematical SIR model generalisation for description of the infectious process dynamics development by adding a testing model is considered. The proposed procedure requires the expansion of states' space dimension due to variables that cannot be measured directly, but allow you to more adequately describe the processes that occur in real situations. Further generalisation of the SIR model is considered by taking into account randomness in state estimates, forecasting, which is achieved by applying the stochastic differential equations methods associated with the application of the Fokker – Planck – Kolmogorov equations for posterior probabilities. As COVID-19 practice has shown, the widespread use of modern means of identification, diagnosis and monitoring does not guarantee the receipt of adequate information about the individual's condition in the population. When modelling real epidemic processes in the initial stages, it is advisable to use heuristic modelling methods, and then refine the model using mathematical modelling methods using stochastic, uncertain-fuzzy methods that allow you to take into account the fact that flow, decision-making and control occurs in systems with incomplete information. To develop more realistic models, spatial kinetics must be taken into account, which, in turn, requires the use of systems models with distributed parameters (for example, models of continua mechanics). Obviously, realistic models of epidemics and their control should include models of economic, sociodynamics. The problems of forecasting epidemics and their development will be no less difficult than the problems of climate change forecasting, weather forecast and earthquake prediction.

Keywords: mathematical model; epidemic; estimation; posterior probability; SIR model.

Введение

Модель SIR (*susceptible, infectious, recovered*), описывающая распространение эпидемии, является базовой при применении подходов математического моделирования, так как в простейшем варианте включает в себя основные фазы эпидемии и в то же время допускает их уточнение с помощью корректирующих членов в уравнениях, а также добавления в систему исходных разрешающих уравнений новых уравнений. Модель SIR удобно использовать для модификации детерминированного подхода в вероятностный, поскольку она учитывает тот факт, что эпидемиологические процессы протекают в условиях наличия неполной информации и погрешностей наблюдения.

Базовая модель SIR и рандомизация модели

Введем следующие обозначения: $N = \text{const}$ – постоянная численность популяции; S – группа членов популяции, которые потенциально могут быть инфицированы; I – количество инфицированных; R – количество выздоровевших, привитых и умерших.

Достаточно обоснованным является принятие предположения

$$S(t) + I(t) + R(t) = N = \text{const}. \quad (1)$$



Из (1) следует, что существуют три основные группы членов в рассматриваемой популяции, численность в каждой из них является переменной, причем изменения направлены в одну сторону: $S \rightarrow I \rightarrow R$.

Между группами S и I скорость изменения плотности подверженных инфицированию $s = \frac{S}{N}$ предполагается равной

$$\frac{ds}{dt} = -\beta \cdot s \cdot i, \quad (2)$$

где β – среднее количество контактов на одного человека во времени; $i = \frac{I}{N}$ – плотность инфицированных.

Отметим, что величина $s \cdot i$ представляет собой плотность контактов между членами групп S и I (за счет чего главным образом и происходит инфицирование).

Скорость передачи между членами групп S и R предполагается пропорциональной величине $\gamma \cdot i$, где $\gamma = \frac{1}{D}$, а D – средний период времени индивидуального инфицирования.

На основании изложенного компоненты математической модели инфицирования $S \rightarrow I$ могут быть представлены подобно закону взаимодействия реагирующих масс в химии [1], согласно которому скорость фракционирования пропорциональна концентрациям реагентов. Соответственно, часть модели инфицирования $I \rightarrow R$ подобна известному в теории массового обслуживания экспоненциальному распределению времени ожидания [2; 3].

Отметим, что описанная простейшая модель не содержит демографических факторов (рождение, смертность от других причин). Таким образом, она пригодна для краткосрочного прогноза, когда количество новорожденных и умерших за рассматриваемый период сравнительно мало (т. е. $N \approx \text{const}$).

Замкнутая система уравнений, описывающая кинетику модели SIR, имеет вид¹ [4; 5]

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\beta \cdot s \cdot i, \\ \frac{di}{dt} &= \beta \cdot s \cdot i - \gamma \cdot i, \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma \cdot i, \quad r = \frac{R}{N}, \\ \frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Система дифференциальных уравнений (3) нелинейная.

Выполним обобщение модели (3) за счет рандомизации. Данную операцию можно осуществить, перейдя в (3) к стохастическим дифференциальным уравнениям путем введения случайных погрешностей в измерения скоростей в правой части (3). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\beta \cdot s \cdot i + G_1 v_1(t), \\ \frac{di}{dt} &= \beta \cdot s \cdot i - \gamma \cdot i + G_2 v_2(t), \\ \frac{dr}{dt} &= \gamma \cdot i + G_3 v_3(t), \\ G_1 v_1(t) + G_2 v_2(t) + G_3 v_3(t) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{pmatrix},$$

$$\langle v_i(t) \rangle = 0, \quad \langle v_i(t_1) v_i(t_2) \rangle = G_i \delta(t_1 - t_2), \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь $v_i(t)$ – случайные ошибки в оценивании скоростей процессов (по повторяющимся индексам нет суммирования).

¹Compartmental models in epidemiology // Wikipedia [Electronic resource]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/compartmental_models_in_epidemiology (date of access: 14.03.2021).



Пандемия вируса COVID-19 показала, что мониторинг является неотъемлемой частью управления инфекционными процессами. Поэтому в качестве вероятностных характеристик величин $s(t)$, $i(t)$, $r(t)$ целесообразно использовать апостериорные вероятности [6]. Обозначим переменные состояния величин $s(t)$, $i(t)$, $r(t)$ как

$$x_1 = s, \quad x_2 = i, \quad x_3 = r. \quad (5)$$

С учетом (5) систему (4) можно записать в общем виде:

$$\dot{\bar{x}}(t) = f[t; \bar{x}(t)] + G_i(t)\bar{v}(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad (6)$$

$$\langle \bar{v}(t) \rangle = 0, \quad \langle \bar{v}(t_1)\bar{v}^T(t_2) \rangle = G_i\delta(t_1 - t_2).$$

В (6) вектор $\bar{x}(t)$ характеризует состояние системы, при этом в общем случае не все компоненты $\bar{x}(t)$ являются измеряемыми. Поэтому введем вектор непосредственных наблюдений (тестирования) $\bar{z}(t)$, связанный с вектором $\bar{x}(t)$ моделью измерения, которая в общем случае имеет вид

$$\bar{z}(t) = \bar{h}[t; \bar{x}(t)] + G_z\bar{n}(t), \quad t \geq t_0, \quad (7)$$

где G_z – матрица; $\bar{n}(t)$ – вектор ошибок (измерения).

Введем дополнительно следующее обозначение апостериорной плотности вероятности:

$$P(\bar{x}; t | \bar{z}_{t_0, t}),$$

где $\bar{z}_{t_0, t}$ – измерения (тестирование) на интервале $[t_0, t]$.

Модель SIR в виде уравнений (6), (7) может использоваться для получения алгоритмов оценивания состояния системы и определения погрешности оценивания.

Считаем, что процесс $\bar{z}(t)$ можно измерять с момента t_0 до текущего момента времени t , т. е. известно $\bar{z}_{t_0, t}$. Проблема нахождения оценки $\tilde{\bar{x}}(t)$ заключается в получении оценки состояния марковского процесса $\tilde{\bar{x}}(t)$ на основании имеющихся в наличии измерений процесса $\bar{z}_{t_0, t}$ (в частности, $\bar{z}(t) = \bar{x}(t) + G_z\bar{n}(t)$).

Полагаем, что на протяжении времени наблюдения увеличивается количество обработанной информации, но использованная информация по мере поступления новой не корректируется.

Обозначим $\tilde{\bar{x}}(t)$ вектор оценивания состояния, который минимизирует среднеквадратичную ошибку оценки, т. е.

$$E_{\min} = \langle (\bar{x}(t) - \tilde{\bar{x}}(t))^2 \rangle.$$

Как известно, искомая оценка является условным математическим ожиданием, вычисляемым по следующей формуле [6]:

$$\tilde{\bar{x}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(t) P(\bar{x}; t | \bar{z}_{t_0, t}) d\bar{x}(t).$$

Согласно теории фильтрации Калмана – Бьюси апостериорная плотность вероятности $P(\bar{x}; t | \bar{z}_{t_0, t})$ удовлетворяет уравнению [6; 7]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\bar{x}; t | \bar{z}_{t_0, t}) = L^+ P(\bar{x}; t | \bar{z}_{t_0, t}) + P(\bar{x}; t | \bar{z}_{t_0, t}) [\bar{h}(t; \bar{x}) - \langle \bar{h}(t; \bar{x}) \rangle]^T G_z^{-1} [\bar{z}(t) - \langle \bar{h}(t; \bar{x}) \rangle]. \quad (8)$$

В (8) оператор L^+ имеет форму [6; 7]

$$L^+ = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(t; \bar{x})(*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [G(t) \bar{X} G^T(t)]_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (*), \quad (9)$$

где $\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$; $\bar{X}_0 = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \end{bmatrix}$; $\bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f} \\ \bar{h} \end{bmatrix}$; $\dot{\bar{y}} = \bar{z}$.

Как известно, $P(\bar{x}; t | \bar{z}_{t_0, t})$ содержит наиболее полную информацию о процессе $\bar{x}(t)$. Но решение уравнений (8), (9) возможно в сравнительно небольшом числе случаев. Поэтому, как правило, ограничиваются информацией, полученной на основе уравнений или алгоритмов, выводимых из (8), (9) [6].



Обозначим ковариационную матрицу процесса $\bar{x}(t)$ следующим образом:

$$V = \left\langle (\bar{x}(t) - \tilde{x}(t))(\bar{x}(t) - \tilde{x}(t))^T \right\rangle.$$

Очевидно, что матрица V характеризует среднеквадратичную погрешность оценивания процесса $\bar{x}(t)$. Согласно теории фильтрации для приближенных оценок $\tilde{x}(t)$ и $V(t)$ на основе уравнений (8), (9) получаются уравнения вида

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \bar{f}(t; \tilde{x}(t)) + VD[\bar{h}(t; \tilde{x}(t))]N^{-1}[\bar{z}(t) - \bar{h}(t; \tilde{x}(t))], \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0. \quad (10)$$

Здесь $D[\bar{h}(t; \tilde{x}(t))]$ – матрица Якоби размером $m \times m$ с элементом $\frac{\partial h_j(t; \tilde{x}(t))}{\partial x_i}$.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & D^T[f(t; \tilde{x})]V(t) + V(t)D[\bar{f}(t; \tilde{x})] + G(t)\bar{X}G^T(t) + \\ & + V(t)D[D[\bar{h}(t; \tilde{x})]N^{-1}\{\bar{z}(t) - \bar{h}(t; \tilde{x})\}], V(t_0) = V_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Замкнутая система уравнений (10), (11) позволяет в принципе получить решения задач оценивания и прогнозирования процессов $\bar{x}(t)$ и определить погрешность такой оценки.

В общем случае система (10), (11) нелинейная, что значительно усложняет получение решений как в общем, так и в конкретных случаях.

Эталонные стохастические модели оценки эпидемиологической ситуации в условиях неполной информации и самоорганизации

Как известно [3], естественный ход эпидемии обладает свойствами самоорганизации [7], что происходит при уменьшении числа степеней свободы системы.

Следуя [7; 8], принимаем, что $\frac{dr}{dt} = 0$. Тогда, как вытекает из (4), $\gamma = 0$, $G_3 = 0$.

Модель, которую в результате получаем, называется математической моделью SI. Она описывается уравнениями состояния

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\beta \cdot s \cdot i + G_1 v_1(t), \\ \frac{di}{dt} &= \beta \cdot s \cdot i - \gamma \cdot i + G_2 v_2(t) \end{aligned} \quad (12)$$

и обобщает модель Лотки – Вольтерры [9].

Модель измерения (тестирования) выбираем в форме

$$z(t) = i(t) + n(t), \quad (13)$$

$$\langle n(t) \rangle = 0, \langle n(t_1)n(t_2) \rangle = G_z \delta(t_1 - t_2).$$

Преобразуем второе уравнение системы (12) с учетом $s + i = 1$ к виду

$$\frac{di}{dt} = \beta i \left[\frac{1}{N} + (1 - i) \right] + G_2 v_2(t). \quad (14)$$

Здесь β – среднее число контактов человека в единицу времени, т. е. число контактов, которые могут привести к инфицированию; i – вероятность (числовая плотность) принадлежности группе инфицированных.

Уравнения (13) и (14) представляют собой математическую основу для получения уравнения типа (10) для оценки и уравнения типа (11) для определения погрешности оценки числовой плотности инфицированных в рассматриваемом примере.

Рассмотрим задачу об оценивании числа инфицированных в случае, когда в некоторый момент времени t_0 в контингенте имеется лишь один инфицированный человек.

Замечание. Предполагаем, что вследствие каких-то причин (например, вакцинации) все члены популяции обладают иммунитетом.

Так как инфицированным остается только один человек, то $I(t) = I(0) = 1$.



Принимаем, что измерения (тестирование) в начальный момент времени $t = t_0$ проводятся с ошибкой $V_0 = 10$. Вследствие этого для периода $t > t_0$ оценка числа инфицированных тоже осуществляется с ошибкой. Исходя из этого, необходимо, чтобы предлагаемые алгоритмы оценки состояния инфицирования популяции были самокорректирующимися.

Уравнения (10) для данной задачи имеют вид

$$\dot{\tilde{i}} = \beta \tilde{i} \left[1 + \frac{1}{N} - \tilde{i} \right] + V(t) [Z(t) - \tilde{i}(t)], \tilde{i}(0) = 0. \quad (15)$$

Погрешность V оценки \tilde{i} удовлетворяет уравнению

$$\dot{V}(t) = -[V(t)]^2, V(0) = 10. \quad (16)$$

Решение (16) имеет вид

$$V(t) = \frac{10}{10t + 1}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что погрешность в начальном тесте уменьшается со временем за счет последующего тестирования.

Уравнение (15) типа Риккати преобразуем в линейное, используя замену

$$\tilde{i}(t) = \frac{1}{u(t)}. \quad (18)$$

Уравнение для $u(t)$ имеет вид

$$\dot{u} + \beta a(t)u = f(t), \quad (19)$$

$$a(t) = \beta \left[1 + \frac{1}{N} - \frac{V}{\beta} \right], f(t) = \beta - V(t)z(t), \tilde{i}_0^2(t) \approx \tilde{i}^2(0) \approx 1.$$

Решение (19) имеет вид [2; 3]

$$u(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int f(t) \mu(t) dt + C \right], \mu(t) = \exp \left(\int a(t) dt \right). \quad (20)$$

Модель наблюдений $z(t)$ выбираем в виде линейной зависимости от времени (результаты тестирования):

$$z(t) = t + \frac{n}{10}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (19), (20) с учетом (18), получаем

$$\tilde{i}(t) = \frac{\exp \left(\beta \left(1 + \frac{1}{10} \right) t \right)}{t + 1} \left[\frac{\beta - 1}{10} \exp(-ab) (Ei(ab + at) - Ei(ab) + 1) \right]^{-1},$$

$$Ei(x) = \int \frac{\exp(ax)}{x} dx. \quad (22)$$

Здесь $Ei(x)$ – интегральная показательная функция [8; 10].

Рассмотрим модель псевдоэпидемии, являющейся результатом ошибок измерения (тестирования).

Пусть в начальный момент времени в изолированный контингент попадает один инфицированный человек и при этом система остается в стационарном состоянии, т. е.

$$\frac{di}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0.$$

Предполагаем, что в контингенте проводятся замеры (выборки), которые в реальности содержат ошибки. Математическая модель инфицирования и измерения в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{di}{dt} = 0, i(0) = 1, \quad (23)$$

$$z(t) = i(t) + n(t),$$

$$\langle v(t) \rangle = 0, \langle v(t_1) v(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2).$$

Уравнения для оценки плотности инфицирования $i(t)$ и определения погрешности оценки $V(t)$ в данном случае получаются из (2), (13) и с учетом (23) имеют вид

$$\frac{d\tilde{i}}{dt} = \frac{10}{10t+1} [z(t) - \tilde{i}(t)], \tilde{i}(0) = 10^{-3}. \quad (24)$$

Выбираем модель наблюдения (21), уравнения которой подставляем в (24). В результате получаем

$$\tilde{i} = \frac{5t^2 + t + 10^{-3}}{10t + 1}.$$

Таким образом, ошибка в начальном измерении $V(0) \neq 0$ приводит к возможности появления ошибок при $t > 0$. При этом оценка $\tilde{i}(t)$ в определении состояния растет, что создает эффект псевдоэпидемии при отсутствии таковой.

Оценка скорости инфицирования $\frac{d\tilde{i}}{dt}$ сначала растет, а потом убывает.

Краткий сравнительный анализ моделей

Уравнения классической модели SIR (3) описывают кинетику детерминированной системы, типичный график которой изображен на рис. 1.

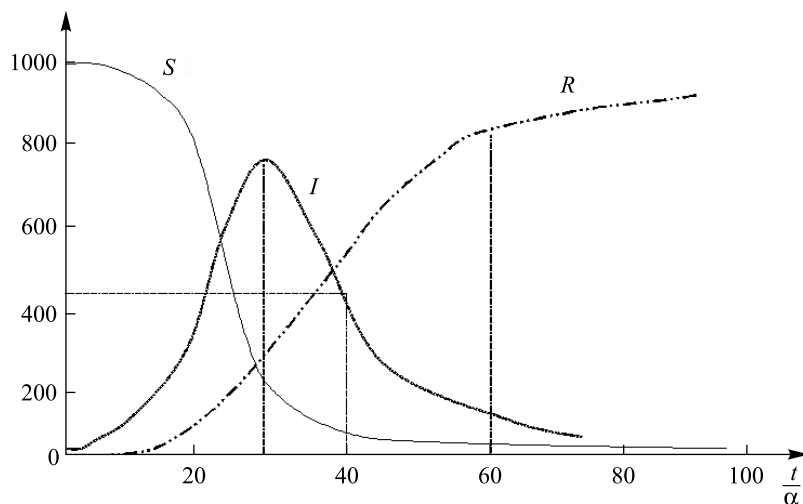


Рис. 1. Зависимость S, I, R от времени при начальных условиях $S(0) = 997, I(0) = 3, R(0) = 0$, скорости инфицирования $\beta = 0,4$ и скорости перехода из I в R $\gamma = 0,04$

Fig. 1. Dependence of S, I, R on time under initial conditions $S(0) = 997, I(0) = 3, R(0) = 0$, infection rate $\beta = 0.4$ and transition rate from I to R $\gamma = 0.04$

Обобщение модели на стохастический случай (4) или (6) и дополнение моделью измерения (7) меняют вид и характер системы (рис. 2).

Простейшая (эталонная) модель инфицирования с учетом случайности и измерений описывается уравнениями (12), (13), обобщающими модель хищник – жертва с чистым заражением контингента потенциально инфицируемых людей.

Модели оценивания числа людей в группах S, I, R построены на основе уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова для априорных или апостериорных плотностей вероятностей. При включении модели измерений (тестирования) оптимальная оценка плотности инфицированных удовлетворяет уравнению (15), а оценка дисперсии (ошибки) – уравнению (16).

Из структурной схемы системы видно, что в стохастической модели наблюдения появляются обратные связи. В соответствии с теорией систем это обеспечивает большую устойчивость к возможности прогнозирования.

Рандомизация модели SIR (3) превращает ее из модели процесса естественного распространения инфекции в модель (4), (14), управляемую белым шумом.

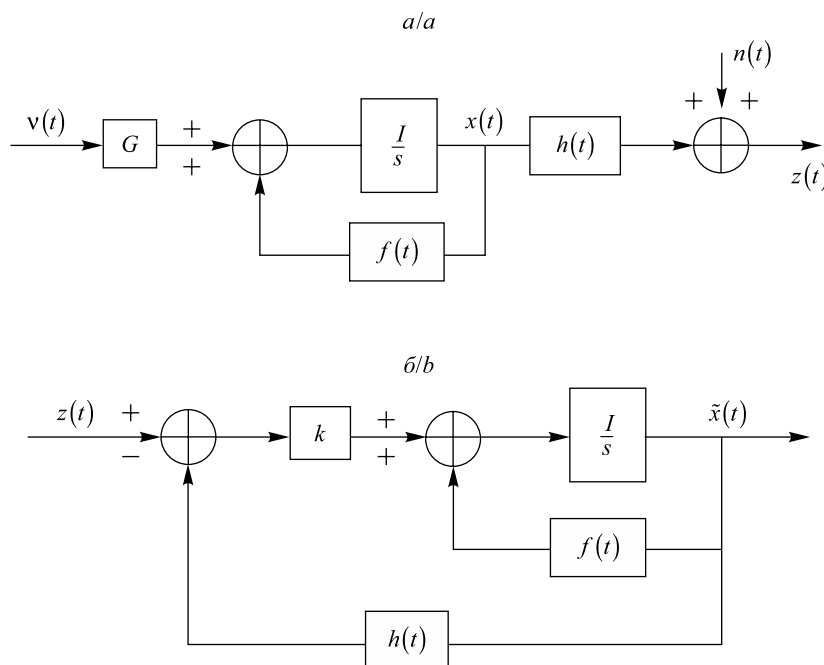


Рис. 2. Структурная схема моделей наблюдения (а) и оценивания (б)
Fig. 2. Block diagram of observation (a) and assessment (b) models

В некоторых странах мира хаотический характер управляющих воздействий наблюдался в начале эпидемии. Математическая модель оценивания (15), общий случай (10), вследствие рандомизации описывается неоднородными дифференциальными уравнениями, содержащими управляющие члены с нулевым трендом. При этом коэффициенты усиления управляющих воздействий, зависящие от дисперсий $V(t)$, удовлетворяющих уравнениям (16), в общем случае (11) изменяются во времени, что характерно для адаптивных систем с обратными связями.

Рассмотрим устойчивость в большом (нечувствительность к неопределенности начального состояния) для простейшей модели естественного распространения инфекции на фоне управляющего белого шума, который моделирует хаотический режим воздействий в начале эпидемии.

В рассматриваемых примерах начального распространения инфекции допустимо считать $i \ll 1 \ll N$. Тогда уравнение (14) принимает вид

$$\frac{di}{dt} = \beta \cdot i + G_2 v_2(t), \quad (25)$$

а уравнение (15) для оценки апостериорного состояния, соответственно,

$$\frac{d\tilde{i}}{dt} = \beta \tilde{i} + V(t)[Z(t) - \tilde{i}(t)], \quad \tilde{i}(0) = 0.$$

Дискретизируем модель по времени [6; 7]. Тогда (25) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{i}(k+1) &= \alpha \tilde{i}(k) + \gamma(k+1)[Z(k+1) - \alpha \tilde{i}(k)], \\ \gamma(k+1) &= \frac{Q(k+1)}{Q(k+1) + G_2}, \quad \tilde{i}(0) = \tilde{i}_0, \quad \alpha \approx \beta. \end{aligned}$$

Для дисперсии оценивания $V(k)$ получаем

$$\begin{aligned} V(k+1) &= \frac{Q(k+1)G_i}{Q(k+1) + G_i}, \\ Q(k+1) &= a^2 V(k) + G_i, \quad V(0) = V_0. \end{aligned}$$

Условие стабилизации погрешности оценивания V имеет вид

$$V(k) = V(k-1) = V_{\text{ст}}. \quad (26)$$



Подставляя в общем случае $V(t)$ в дискретные моменты времени в (26), получаем квадратное уравнение относительно V_{ct} , положительный корень которого $V_{ct}(k) = 0,56W$ при $k = 3$.

На рис. 3 изображено поведение $V(k)$ в зависимости от V_0 . Такое поведение $V(k)$ указывает на возможность существования апостериорной неопределенности оценки при определенных значениях параметров, т. е. устойчивость в большом.

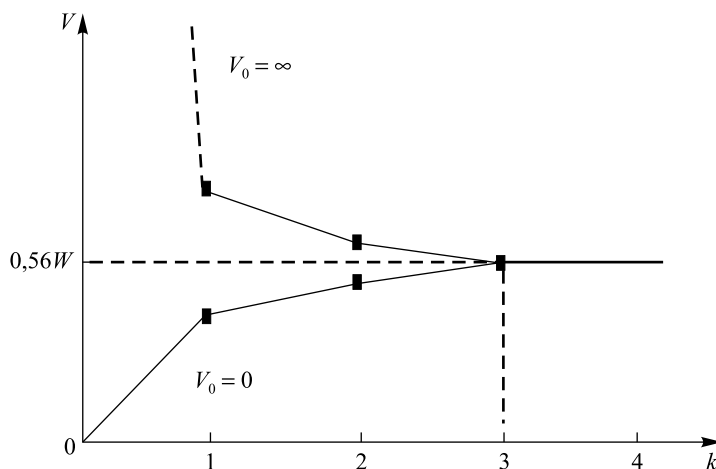


Рис. 3. Поведение $V(k)$ в зависимости от V_0
Fig. 3. $V(k)$ depending on V_0 behaviour

Замечание. Следует отметить работу [10], в которой используются дискретная модель SIR и ее модификации для генерации членов временного ряда.

Адекватность предложенной модели реальным процессам характеризует функция (матрица) чувствительности [6; 11], анализ которой является составной частью создания достоверной модели. Параметры (коэффициенты) модели b_i ($i = 1, \dots, n$) точно неизвестны и определяются невязками $\Delta b_i = b_i - \bar{b}_i$, где b_i – истинное (неизвестное), а \bar{b}_i – приближенное значение параметров, используемых в уравнениях оценивания [6].

Чувствительность модели характеризуется отношением вида

$$\Gamma_{i,j}(t) = \frac{V(t) - \bar{V}}{\Delta b_i}.$$

Здесь $V(t)$ – матрица дисперсии оценки, которая находится из (11) при истинном значении параметров задачи (теоретически).

Рассмотрим вопрос, связанный с оценкой чувствительности для стационарного состояния, описываемого уравнениями состояния и измерения

$$\frac{di}{dt} = 0, z(t) = hi(t) + n(t), h = \beta.$$

Выражение для дисперсии в этом случае имеет вид (16), (17).

Чувствительность параметра h в большом находится по формуле

$$\Gamma_h(t) = \frac{h^2 \Delta h \bar{V}^3(0) t^2 - 2 \bar{V}^2(0) h \bar{r} t}{(h^2 \bar{V}(0) t + \bar{r})^2}.$$

График зависимости $\Gamma_h(t)$ от времени при заданных значениях входных параметров изображен на рис. 4.

Чувствительность в малом определяется формулой

$$\gamma_{i,j}(t) = \left. \frac{\partial V(t)}{\partial b_i} \right|_{b_i = \bar{b}}.$$

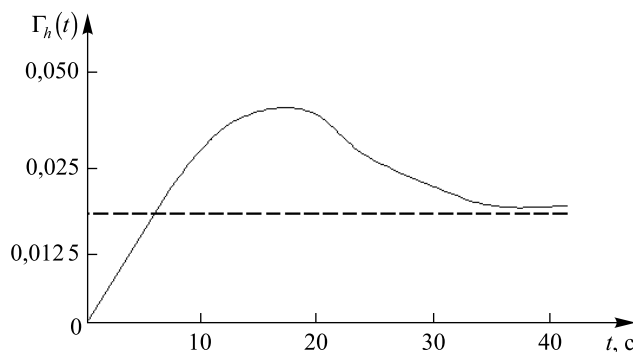


Рис. 4. Пример зависимости $\Gamma_h(t)$ от времени
при $\bar{h} = 1$, $\bar{r} = 20$, $\bar{V}(0) = 2$

Fig. 4. An example of the $\Gamma_h(t)$ time dependence
for $\bar{h} = 1$, $\bar{r} = 20$, $\bar{V}(0) = 2$

Введем следующее представление:

$$V(t) - \bar{V}(t) = \sum_{i=1}^3 \gamma_{i,j}(t) d\bar{b}_i.$$

Тогда получаем

$$\gamma_h(t) = \frac{-2h\bar{V}^2(0)\bar{r}t}{(h^2V(0)t\bar{r})^2}.$$

На рис. 5 изображена зависимость $\gamma_h(t)$ от времени при заданных значениях входных параметров.

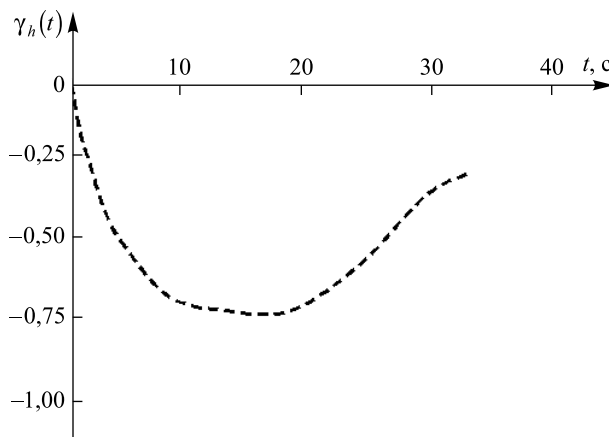


Рис. 5. Пример зависимости $\gamma_h(t)$ от времени
при $\Delta h = 0,5$, $h = 1$, $r = 20$, $\bar{V}(0) = 2$

Fig. 5. An example of the $\gamma_h(t)$ time dependence
for $\Delta h = 0.5$, $h = 1$, $r = 20$, $\bar{V}(0) = 2$

Заключение

1. В качестве математической модели процесса инфицирования предложена классическая модель SIR, управляемая процессами типа белого шума, что может быть адекватно начальной хаотической фазе эпидемии.

Таким образом, модельный процесс естественного распространения эпидемии развивается в среде управляющих белых шумов, моделирующих несистемный характер мер в начале эпидемии.

2. Модель наблюдения в общем случае учитывает существующие в реальности ошибки тестирования, что более адекватно реальности, так как решает проблему опосредствованного получения информации.

3. Грубость модели (устойчивость в большом и малом) позволяет выделить начальный и последующий периоды распространения инфекции с точки зрения регулирования и управления на начальном этапе.

Отмечено влияние начальных условий на длительность переходного режима эпидемии, в течение которого стохастический режим может возникать как следствие нелинейности системы.

4. Чувствительность (в большом и малом) позволяет оценить влияние параметров модели на ее свойства и структурировать процесс распространения инфекции в зависимости от времени. Оценка параметров должна состоять из совместного решения задач идентификации и управления.

Библиографические ссылки

1. Варфоломеев СД, Гуревич КГ. *Биокинетика*. Москва: Гранд; 1999. 716 с.
2. Ахмеров РР. Очерки по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. § 37. Дифференциальные уравнения в биологии, химии, медицине [Интернет]. В: Ахмеров РР, Садовский БН. *Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. Новосибирск: Институт вычислительных технологий Сибирского отделения РАН; 2002 [протитировано 14 марта 2021 г.]. Доступно по: http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/ode_unicode/s-37/s-37.html.
3. Марри Дж. *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях*. Бабский ВГ, переводчик; Мышкис АД, редактор. Москва: Мир; 1983. 397 с.
4. Eastman B, Meaner C, Przedborski M, Kohandel M. Mathematical modeling of COVID-19 containment strategies with consideration for limited medical resources. *medRxiv* [Preprint]. 2020 [cited 2021 March 14]. Available from: <https://doi.org/10.1101/2020.04.17.20068585>.
5. Dong E, Du H, Gardner L. An interactive web-based dashboard to track COVID-19 in real time. *The Lancet Infectious Diseases*. 2020;20(5):533–534. DOI: 10.1016/S1473-3099(20)30120-1.
6. Сейдж Э, Мелс Д. *Теория оценивания и ее применение в связи и управлении*. Москва: Связь; 1976. 496 с. (Статистическая теория связи; выпуск 6).
7. Snyder DL. *The state-variable approach to continuous estimation with applications to analog communication theory*. Cambridge: MIT Press; 1969. 114 p.
8. Хакен Г. *Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах*. Москва: Мир; 1985. 424 с.
9. Фунтов АА. О приближенном аналитическом решении уравнений Лотки – Вольтерры. *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2011;19(2):89–92. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-2-89-92.
10. Харин ЮС, Волошко ВА, Дернакова ОВ, Малюгин ВИ, Харин АЮ. Статистическое прогнозирование динамики эпидемиологических показателей заболеваемости COVID-19 в Республике Беларусь. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;3:36–50. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-36-50.
11. Оморев РО. Метод топологической грубости динамических систем: приложения к синергетическим системам. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики, оптики*. 2020;20(2):257–262. DOI: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-257-262.

References

1. Varfolomeev SD, Gurevich KG. *Biokinetika* [Biokinetics]. Moscow: Grand; 1999. 716 p. Russian.
2. Akhmerov RR. [Essays on the theory of ordinary differential equations. § 37. Differential equations in biology, chemistry, medicine] [Internet]. In: Akhmerov RR, Sadovsky BN. *Osnovy teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [Fundamentals of the theory of ordinary differential equations]. Novosibirsk: Institute of Computational Technologies, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; 2002 [cited 2021 March 14]. Available from: http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/ode_unicode/s-37/s-37.html. Russian.
3. Murray JD. *Lectures on nonlinear-differential-equations. Models in biology*. Oxford: Clarendon Press; 1977. 397 p. Russian edition: Murray J. *Nelineinye differentsial'nye uravneniya v biologii. Lektsii o modelyakh*. Babskii VG, translator; Myshkis AD, editor. Moscow: Mir; 1983. 397 p.
4. Eastman B, Meaner C, Przedborski M, Kohandel M. Mathematical modeling of COVID-19 containment strategies with consideration for limited medical resources. *medRxiv* [Preprint]. 2020 [cited 2021 March 14]. Available from: <https://doi.org/10.1101/2020.04.17.20068585>.
5. Dong E, Du H, Gardner L. An interactive web-based dashboard to track COVID-19 in real time. *The Lancet Infectious Diseases*. 2020;20(5):533–534. DOI: 10.1016/S1473-3099(20)30120-1.
6. Sage AP, Melse JL. *Estimation theory with application to communication and control*. New York: McGraw-Hill; 1971. 752 p. Russian edition: Sage A, Melse J. *Teoriya otsenivaniya i ee primeneniye v svyazi i upravlenii*. Moscow: Svyaz'; 1976. 496 p. (Statisticheskaya teoriya svyazi; vypusk 6).
7. Snyder DL. *The state-variable approach to continuous estimation with applications to analog communication theory*. Cambridge: MIT Press; 1969. 114 p.
8. Haken H. *Sinergetika. Ierarkhii neustoichivostei v samoorganizuyushchikhsya sistemakh i ustroistvakh* [Synergetics. Hierarchies of instabilities in self-organising systems and devices]. Moscow: Mir; 1985. 424 p. Russian.
9. Funtov AA. About approximate analytical solutions of Lotka – Volterra equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaya nelineinaya dinamika*. 2011;19(2):89–92. Russian. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-2-89-92.
10. Kharin YuS, Valoshka VA, Dernakova OV, Malugin VI, Kharin AYU. Statistical forecasting of the dynamics of epidemiological indicators for COVID-19 incidence in the Republic of Belarus. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;3:36–50. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-36-50.
11. Omorov RO. Method of topological roughness of dynamic systems: applications to synergetic systems. *Nauchno-tehnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki, optiki*. 2020;20(2):257–262. Russian. DOI: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-257-262.

Получена 14.04.2021 / исправлена 26.04.2021 / принята 29.09.2021.
Received 14.04.2021 / revised 26.04.2021 / accepted 29.09.2021.