

---

---

# ФИЗИКА ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

---

## ATOMIC NUCLEUS AND ELEMENTARY PARTICLE PHYSICS

---

---

УДК 539.1

### НЕКОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ КАНАЛИРОВАННЫХ ЧАСТИЦ НА ЭЛЕКТРОНАХ

В. В. ТИХОМИРОВ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Институт ядерных проблем БГУ, ул. Бобруйская, 11, 220006, г. Минск, Беларусь

Статья посвящена проблеме последовательного описания движения заряженных частиц высоких энергий в поле атомных цепочек и плоскостей ориентированных кристаллов, применяемого для управления пучками крупнейших ускорителей и получения интенсивного гамма-излучения. В дополнение к развитому ранее описанию рассеяния каналированных частиц на ядрах рассматривается некогерентное рассеяние на электронах. Развиваемая теория учитывает эффекты передачи импульса между быстрыми частицами и электронами атомов кристалла на расстояниях, начиная с минимальных и кончая превышающими межатомные, а также включает зависящий от температуры фактор Дебая – Валлера, рассчитанные с учетом деталей атомной структуры формфакторы и функцию рассеяния. Все эффекты модификации электронного рассеяния в кристаллах сведены к величине, играющей роль эффективного минимального передаваемого импульса и более чем на порядок превышающей величину, соответствующую средней атомной энергии теории Бете – Блоха. Совместное использование этой величины с выражением для среднего квадрата угла отклонения классически движущейся частицы позволяет корректно сравнить рассеяние на электронах и ядрах, а с сечением Резерфорда – смоделировать процесс плоскостного каналирования положительно заряженных частиц в весьма протяженных кристаллах, которые предполагается применять для вывода пучков из ускорителей, измерения электромагнитных характеристик короткоживущих частиц и создания источников интенсивного узкополосного рентгеновского излучения и гамма-излучения на основе кристаллических ондуляторов.

**Ключевые слова:** высокие энергии; релятивистская квантовая механика; каналирование частиц в кристаллах; изогнутые кристаллы; рассеяние частиц электронами; когерентное рассеяние; некогерентное рассеяние.

**Благодарность.** Автор признателен Еврокомиссии за поддержку грантом N-LIGHT GA 872196, профессору И. Д. Феранчуку за ценную информацию по расчетам атомной структуры, а также профессорам Ё. Оцуки и Х. Нитте за обсуждение проблем некогерентного рассеяния в кристаллах в Университете Васэда (Токио) в 1990–1991 гг.

---

#### Образец цитирования:

Тихомиров ВВ. Некогерентное рассеяние ультрарелятивистских каналированных частиц на электронах. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2021;3:49–61. <https://doi.org/10.33581/2520-2243-2021-3-49-61>

#### For citation:

Tikhomirov VV. Incoherent ultrarelativistic channeling particle scattering by electrons. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2021;3:49–61. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-2243-2021-3-49-61>

---

#### Автор:

**Виктор Васильевич Тихомиров** – доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник отраслевой лаборатории радиационной безопасности.

#### Author:

**Viktor V. Tikhomirov**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; chief researcher at the sectoral laboratory of radiation safety. [vvtikh@mail.ru](mailto:vvtikh@mail.ru)





## INCOHERENT ULTRARELATIVISTIC CHANNELING PARTICLE SCATTERING BY ELECTRONS

V. V. TIKHOMIROV<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Institute for Nuclear Problems, Belarusian State University,  
11 Babrujskaja Street, Minsk 220006, Belarus*

The problem of high-energy charged particle motion in the field of atomic strings and planes of oriented crystals, widely applied to control large accelerator beams and generate intense gamma radiation, is addressed. Following the previously developed theory of channeled particles incoherent scattering by crystal atom nuclei, we consider here the same by crystal atom electrons. The theory developed takes into consideration all the effects of momentum transfer between fast particles and electrons of atoms in a crystal in the range from the nuclear radius up to the many inter-atomic distances. The theory also includes the temperature-dependent Debye – Waller factor, as well as both the atomic form factors and scattering function, evaluated with the detail consideration of atomic structure. All the modifications of electron scattering in crystals are reduced to the value of the effective minimum momentum transfer, which by an order of value exceeds that one, related with the Bethe – Bloch mean atomic energy. Substituting this quantity to the expression for the mean square of the scattering angle of a classically moving particle makes it possible to compare the scattering by electrons and nuclei, while its joint use with the Rutherford cross section allows for the correct simulations of the planar channeling of positively charged particles in the thickest crystals, supposed to be used for the beam extraction from high energy accelerators, measurement of electromagnetic characteristics of short-living particles and development of intense narrow-band X-ray and gamma radiation sources based on crystal undulators.

**Keywords:** high energy; relativistic quantum mechanics; particle channeling in crystals; bent crystals; scattering by electrons; coherent scattering; incoherent scattering.

**Acknowledgements.** The author is grateful to the European Commission for the support by the N-LIGHT GA 872196 grant, professor I. D. Feranchuk for valuable information on atomic structure calculations, as well as professors Y. Otsuki and H. Nitta for discussing the problems of incoherent scattering in crystals at Waseda University (Tokyo) in 1990–1991.

### Введение

Сопровождающийся поперечными осцилляциями процесс каналированного движения быстрых заряженных частиц вдоль атомных цепочек и плоскостей кристаллов, а также других упорядоченных атомных структур имеет ряд перспективных приложений, связанных с получением жесткого электромагнитного излучения, управлением движением и регистрацией частиц, измерением и модификацией их характеристик [1]. Распространение частиц через ориентированные кристаллы, помимо этого, является источником новых задач квантовой теории и методов экспериментальной проверки их решений. В частности, эффективность вывода пучков из ускорителей [2], точность измерения электромагнитных характеристик короткоживущих частиц [3; 4] и яркость источников интенсивного узкополосного рентгеновского излучения и гамма-излучения на основе кристаллических ондуляторов [1; 5] критически зависят от устойчивости каналирования в условиях сильного изгиба и значительной протяженности кристаллов. При этом возмущение каналированного движения в областях его максимальной устойчивости вызывается некогерентным рассеянием как на ядрах, так и на электронах, достигая критического уровня в пространственной области, где интенсивности данных процессов сравниваются. По этой причине описание многих приложений эффекта каналирования требует построения теории некогерентного рассеяния частиц на атомных ядрах и электронах.

Из теории ионизационных потерь энергии [6–10] известно, что зона ближних столкновений используемых в приложениях [1–5] частиц с лоренц-фактором  $\gamma \sim 10^3$ , в которой рассеяние мало отличается от рассеяния на свободных электронах, превышает несколько межатомных расстояний, описать некогерентное рассеяние на электронах в кристаллах на основе величины локальной электронной плотности (концентрации) представляется в еще меньшей степени возможным, чем в случае рассеяния на ядрах [11; 12]. Данная статья дополняет недавнее развитие теории ядерного рассеяния в указанных работах, она посвящена рассеянию частиц высоких энергий на электронах.

Хотя описание ионизационных потерь в условиях неоднородности распределения электронов атомных цепочек и плоскостей обсуждалось ранее [13–15], его нельзя непосредственно применить к процессу многократного электронного рассеяния, потому что последнее обусловлено поперечной передачей импульса, в то время как ионизационные потери связаны не только с поперечной, но и с продольной



передачей. Не внося вклад в многократное рассеяние, продольная передача импульса становится существенной при достаточно высоких энергиях, делая известную формулу теории ионизационных потерь [16], которая учитывает продольную передачу, неприменимой для расчета среднего квадрата угла рассеяния. Помимо релятивистских величин, продольные передачи импульса доминируют и вблизи порога возбуждения и ионизации атомов, где представленное описание также будет отличаться от предложенного Г. Бете [6; 7] для ионизационных потерь. Кроме того, мы включим в развиваемую количественную теорию некогерентного электронного рассеяния ранее не учтенные фактор Дебая – Валлера и рассчитанные на основе детального рассмотрения атомной структуры формфакторы [17–19] и функцию рассеяния [17; 20], параметризовав все описываемые ими эффекты простой формулой, содержащей локально определяемый параметр, имеющий смысл нижней границы импульса, передаваемого при рассеянии частиц на электронах.

### Отклонение частицы единичным атомом

Теория некогерентного электронного рассеяния частиц с энергиями, используемыми в приложениях [2–5], должна сочетать классическое описание движения частиц с квантовым расчетом некогерентной передачи импульса атомам среды. Поскольку переход к первому из них уже был обоснован на примере ядерного рассеяния в рамках ряда квантовых подходов [11; 12; 21] и привел к результатам, соответствующим интуитивным представлениям классической электродинамики, мы будем следовать последним и при расчете углов рассеяния частиц электронами, исходя [22] из полного уравнения Лоренца<sup>1</sup>

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e \vec{\nabla} \varphi + e \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1)$$

Для упрощения перехода к квантовому случаю последнее выражено через скалярный  $\varphi$  и векторный  $\vec{A}$  потенциалы, создаваемые временными гармониками пространственных распределений плотностей заряда  $\rho(\vec{r} - \vec{r}_{at})e^{-i\omega t}$  и тока  $\vec{j}(\vec{r} - \vec{r}_{at})e^{-i\omega t}$  атома с радиус-вектором  $\vec{r}_{at}$  и удовлетворяющие уравнениям [9]

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi \vec{j}(\vec{r} - \vec{r}_{at})e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

$$\varepsilon(\omega) \left( \Delta \varphi - \varepsilon(\omega) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = -4\pi \rho(\vec{r} - \vec{r}_{at})e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

в которых в рассматриваемом достаточно жестком электромагнитном диапазоне для диэлектрической проницаемости можно использовать высокочастотный предел [15]

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2},$$

содержащий квадрат плазменной частоты  $\omega_{pl}^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m}$ , где  $n_e$ ,  $e$  и  $m$  – концентрация (пространственная плотность) электронов среды, заряд и масса электрона соответственно. Решая уравнения (2), (3) методом разложения в ряд Фурье, найдем скалярный и векторный потенциалы, действующие на частицу, движущуюся со скоростью  $\vec{v}$  и прицельным параметром  $\vec{b}$ , подставим их в уравнение (1), интегрируя которое получим классическое релятивистское выражение

$$\Delta \vec{p}_\perp(\vec{b} - \vec{r}_{at}) = 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int \vec{k}_\perp \frac{\vec{v} \vec{j}_\vec{k} - \rho_\vec{k}}{k^2 - \omega^2 + \omega_{pl}^2} e^{i\vec{k}(\vec{b} - \vec{r}_{at} + \vec{v}t) - i\omega t} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (4)$$

для поперечной компоненты импульса, передаваемого частице атомом. Заметим, что в статическом пределе  $\omega = 0$ , в отсутствие среды ( $\omega_{pl} = 0$ ) и в пренебрежении атомным током выражение (4) переходит в формулу для отклонения частицы электростатическим потенциалом в приближении малых углов, описывающую основной вклад и в рассматриваемом релятивистском случае.

Для перехода от (4) к соответствующему квантовому выражению  $\omega$  следует заменить [23] на частоту атомного перехода  $\omega_{n0}$  между традиционно обозначаемыми [7; 8; 13] дираковскими символами основным  $|0\rangle$  и возбужденным либо ионизованным атомным состоянием  $|n\rangle$ , а фурье-компоненты плотности заряда и тока – на их матричные элементы:

<sup>1</sup>В статье используется система единиц  $c = \hbar = 1$ .



$$\rho_{\vec{k}} \rightarrow \rho_{n0}(\vec{k}) = \sum_a \langle n | e^{-i\vec{k}\vec{r}_a} | 0 \rangle,$$

$$\vec{j}_{\vec{k}} \rightarrow \vec{j}_{n0}(\vec{k}) = \sum_a \frac{-i}{2m} \langle n | \vec{\nabla} e^{-i\vec{k}\vec{r}_a} + e^{-i\vec{k}\vec{r}_a} \vec{\nabla} | 0 \rangle,$$

где суммирование проводится по атомным электронам.

### Рассеяние на совокупности атомов кристаллической решетки

Для нахождения квадрата импульса некогерентного рассеяния в кристалле квантовое обобщение выражения (4) необходимо просуммировать по всем его атомам и усреднить квадрат модуля полученной суммы по их тепловым колебаниям. Для того чтобы выделить влияние упорядоченного расположения атомов, следует объединить содержащие их координаты экспоненты из (4) и комплексно сопряженного ему интеграла, вводя разность и сумму векторных переменных интегрирования  $\vec{k}_1$  и  $\vec{k}_2$ , и воспользоваться вытекающим из интегрального представления дельта-функции соотношением

$$\iint \exp \left[ i(\omega_{n0}t_1 + \vec{k}_1\vec{v}t_1 - \omega_{n0}t_2 - \vec{k}_2\vec{v}t_2) \right] dt_1 dt_2 = 8\pi^2 \delta \left[ (\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\vec{v} + 2\omega_{n0} \right] \delta \left[ (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\vec{v} \right],$$

которое показывает, что векторы  $\vec{k}_1$ ,  $\vec{k}_2$  имеют равные продольные компоненты:

$$k_{1\parallel} = k_{2\parallel} = k_{\parallel} = \frac{-\omega_{n0}}{v}. \quad (5)$$

При типичных для приложений [2–5] лоренц-факторах  $\gamma \sim 10^3$  масштабные релятивистские эффекты позволяют избежать [9; 10; 14; 15] рассмотрения наиболее сложных аспектов теории взаимодействия частиц с электронной подсистемой конденсированного вещества [6; 7], связанных со вхождением энергии атомного возбуждения  $\omega_{n0}$  в знаменатель формулы (4). Суть в том, что квадрат продольной компоненты (5) редуцирует вклад квадрата энергии атомного возбуждения  $\omega_{n0}^2$  до величины  $\left( \frac{\omega_{n0}}{\gamma v} \right)^2$ , становящейся при  $\gamma \sim 10^3$  пренебрежимо малой по сравнению с квадратом плазменной частоты  $\omega_{pl}^2$  конденсированного вещества. Это позволяет упростить знаменатель (4), проводя замену [9; 15]

$$k^2 - \omega_{n0}^2 + \omega_{pl}^2 \rightarrow k_{\perp}^2 + \omega_{pl}^2. \quad (6)$$

Помимо того что сокращение вкладов энергии атомного возбуждения в знаменателе (4) существенно упрощает все рассмотрение по сравнению с нерелятивистской теорией ионизационных потерь [6; 7], оно отражает невозмущенное простираение кулоновского потенциала в поперечной плоскости вплоть до расстояний  $b \sim k^{-1} \sim \frac{c}{\omega_{pl}} \sim 10^{-7}$  см, говорящее о принципиальной необходимости рассмотрения не-локальной природы электронного рассеяния в масштабах межплоскостных расстояний, составляющих несколько ангстрем. Отметим также, что, в отличие от ионизационных потерь энергии [9], связанных с передачей продольной компоненты импульса, рассмотрение еще больших прицельных расстояний, соответствующих пределу непрерывной среды, приводит к гарантируемым соображениями симметрии нулевому вкладу в передаваемый поперечный импульс.

После перехода к переменной  $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$  суммирование по атомам решетки, выполненное с учетом структурного фактора  $S$ , периодичности расположения атомов и теплового разброса их положений относительно узлов решетки, характеризующегося в простейшей модели гауссовым распределением со среднеквадратичной амплитудой  $u_1$  [24], приводит к равенству

$$\left\langle \sum_a e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)_{\perp} \vec{r}_a} \right\rangle = 4\pi^2 n \Delta z \sum_{\vec{g}} S(\vec{g}) e^{-g^2 u_1^2 / 2} \delta(\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp} - \vec{g}), \quad (7)$$

в правой части которого суммирование осуществляется по векторам  $\vec{g}$  обратной решетки, здесь  $n$  – число элементарных ячеек в единице объема кристалла, а  $\Delta z$  – длина произвольного прямолинейного участка траектории частицы. Перечисленные операции приводят к среднему квадрату импульса некогерентного рассеяния на единице длины в точке  $\vec{b}$  плоскости прицельного параметра, практически совпадающей с плоскостью поперечного движения относительно направления выбранной атомной цепочки или плоскости:



$$\left\langle \frac{dp_{\perp}^2(\vec{b})}{dz} \right\rangle = \frac{1}{4\pi^2 v^2} \sum_{\vec{g}} S(\vec{g}) e^{i\vec{g}\vec{b}} \int d^2 k_{\perp} \left( k_{\perp}^2 - \frac{g^2}{4} \right) \sum_{n=1}^{\infty} M_{0n}^* \left( \vec{k} - \frac{\vec{g}}{2} \right) M_{n0} \left( \vec{k} + \frac{\vec{g}}{2} \right), \quad (8)$$

где введены обозначение

$$M_{n0}(\vec{k}) \equiv (Aj)_{n0}(\vec{k}) = \frac{4\pi\alpha}{k_{\perp}^2 + \omega_{pl}^2} \sum_a \langle n | e^{-i\vec{k}\vec{r}_a} - \frac{i(\vec{\nabla} e^{-i\vec{k}\vec{r}_a} + e^{-i\vec{k}\vec{r}_a} \vec{\nabla})}{2m} | 0 \rangle \quad (9)$$

и вектор  $\vec{k} = \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2}$ , последний, помимо поперечной компоненты  $\vec{k}_{\perp}$ , по которой производится интегрирование, имеет продольную компоненту  $k_{\parallel}$ , в соответствии с (5)  $k_{\parallel} = \frac{-\omega_{n0}}{v}$ . Большинство деталей интегрирования по поперечной компоненте импульса можно будет выяснить далее, пренебрегая вкладом плотности тока и рассматривая произвольный член суммы по векторам обратной решетки

$$\int d^2 k_{\perp} \frac{\vec{k}_+ \vec{k}_-}{(k_+^2 + \omega_{pl}^2)(k_-^2 + \omega_{pl}^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_a \langle 0 | e^{i\vec{k}_- \vec{r}_a} | n \rangle \langle n | e^{-i\vec{k}_+ \vec{r}_a} | 0 \rangle, \quad (10)$$

в котором

$$\vec{k}_{\pm} = \vec{k}_{\perp} \pm \frac{\vec{g}}{2}. \quad (11)$$

### Интегрирование по переданному импульсу в случае аморфной среды

Выражение (10) дополнительно упрощается в соответствующем нулевому вектору обратной решетки  $\vec{g} = 0$  случае аморфной среды, когда оно может быть представлено в виде

$$\int_{|\vec{k}_{\perp}| < k_0} \frac{k_{\perp}^2 S(k_{\perp}) d^2 k_{\perp}}{(k_{\perp}^2 + \omega_{pl}^2)^2} + \pi Z \int_{k_0^2}^{k_{\max}^2} \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} \equiv 2\pi Z \ln \left( \frac{k_{\max}}{k_{\text{eff}}} \right). \quad (12)$$

Действительно, двойная сумма произведений матричных элементов числителя (10) определяет функцию рассеяния<sup>2</sup> [17; 20]. Метод расчета подобных сумм опирается на свойство полноты состояний, приводящее к представлению [7]

$$S(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle 0 | \sum_a e^{i\vec{k}\vec{r}_a} | n \rangle \langle n | \sum_b e^{i\vec{k}\vec{r}_b} | 0 \rangle = Z + \sum_{a \neq b} \langle 0 | e^{i\vec{k}(\vec{r}_a - \vec{r}_b)} | 0 \rangle - F^2(k), \quad (13)$$

где  $F(k) \equiv \sum_a \langle 0 | e^{i\vec{k}\vec{r}_a} | 0 \rangle$  – атомный формфактор [18; 19]. Представление (13) содержит как диагональные (первое и третье слагаемые) вклады, так и сумму недиагональных (второе слагаемое), нахождение последних осложняется необходимостью расчета соответствующих одночастичных матричных элементов и учета свойств симметрии атомных волновых функций. При импульсах  $k > k_0$ , где  $k_0 \sim 100$  кэВ/с ( $c$  – скорость света)<sup>3</sup> для кремния ( $Z = 14$ ) и  $k_0 \sim 200$  кэВ/с для вольфрама ( $Z = 74$ ), второе и третье слагаемые быстро спадают, и функция рассеяния (13) приближается к  $Z$ , что позволяет выделить в (12) второе слагаемое, соответствующее чисто кулоновскому рассеянию. Граничный импульс  $k_0$  был оценен выше на основе сравнения погрешности нерелятивистского приближения при  $k < k_0$  и отличия  $S$  от  $Z$  при  $k > k_0$ . Поэтому при выполнении условия  $k_{\max} > k_0$  сумма интегралов (12) может быть параметризована единственной величиной  $k_{\text{eff}}(x)$ , имеющей смысл эффективной нижней границы передаваемых импульсов.

Переход при  $k_{\max} > k_0$  к чисто кулоновскому рассеянию открывает возможность экстраполяции в релятивистскую область переданных импульсов  $k \geq t$ , где величина  $t$  (равная в обычных единицах  $mc$ ) задает релятивистский масштаб импульса. Суть в том, что каналирование достаточно высокоэнергетичных частиц, а вместе с ним и не нарушающее его устойчивости некогерентное рассеяние становятся при высоких энергиях глубоко релятивистскими, о чем говорит максимальный поперечный импульс каналированной частицы  $\sqrt{2V_0 \epsilon}$ , достигающий при энергии 1 ТэВ в кремнии ультрарелятивистских

<sup>2</sup>При том, что аналогичное обозначение традиционно использовано в (7), (8) для структурного фактора, ниже под  $S(k)$  и  $S(k_{\perp})$  везде понимается функция рассеяния.

<sup>3</sup>Упомянутая единица измерения импульса описывается в статье «Электронвольт» интернет-энциклопедии «Википедия» (см.: <https://ru.wikipedia.org/wiki/электронвольт>).



величин  $\sim 10m$ . Переход к релятивистскому описанию кулоновского рассеяния, как обычно [8], не вызывает заметных затруднений. В самом деле, в пренебрежении движением и связью электронов в атомах передаваемые двухмерный поперечный импульс  $\vec{k}_\perp$ , энергия  $T$ , трехмерный  $\vec{k}$  и четырехмерный  $Q \equiv (T, \vec{k})$  импульсы связаны соотношениями

$$T \equiv E_n - E_0 = \sqrt{k^2 + m^2} - m = \frac{k_\perp^2}{2m} = \frac{-Q^2}{2m}, \quad (14)$$

выразив через них сечение кулоновского рассеяния в виде

$$d\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{v^2} \frac{d(-Q^2)}{Q^4} = \frac{4\pi\alpha^2}{v^2} \frac{dk_\perp^2}{k_\perp^4} = \frac{2\pi\alpha^2}{mv^2} \frac{dT}{T^2},$$

можно убедиться, что применимость второго слагаемого (12) в действительности не ограничена нерелятивистским случаем.

Касательно корректности нерелятивистского разложения в области  $k < k_0$  поясним, что следующее из (14) неравенство

$$k_\parallel \approx \frac{k_\perp^2}{2m} \ll k_\perp$$

позволяет считать вклады продольного импульса релятивистскими поправками в случае свободных электронов. Однако при учете связи последних в атомах (ее максимальная энергия, например, в вольфраме достигает 69,5 кэВ) продольная компонента ограничивается снизу величиной  $\frac{\omega_{n0}}{v}$ , которую, конечно, нельзя считать пренебрежимо малой при нерелятивистском рассмотрении. Сказанное оказывается существенным при расчете функции рассеяния в пределе малых импульсов

$$S(k) \approx \sum_a \langle 0 | x_a^2 | 0 \rangle k^2,$$

не позволяющем проследить зависимость от  $k_\perp$ . Избежать этого затруднения удастся при учете вклада в (8), (9) атомного тока, после которого входящий в выражение (9) интеграл в пределе малых  $|\vec{k}|$  принимает вид

$$\langle n | e^{-i\vec{k}\vec{r}} - \frac{i(\vec{\nabla} e^{-i\vec{k}\vec{r}} + e^{-i\vec{k}\vec{r}} \vec{\nabla})}{2m} | 0 \rangle \approx -i(\vec{k} + \omega_{n0}\vec{v}) \langle n | \vec{r} | 0 \rangle. \quad (15)$$

Усредняя далее квадрат модуля (15) по азимутальному углу ориентации вектора  $\vec{k}$  относительно скорости частицы [8], убеждаемся в сокращении вкладов продольного импульса в уточненной функции рассеяния

$$S(k) = k^2 \sum_a |\langle n | x_a | 0 \rangle|^2 + 2\omega_{n0} (\vec{k} \langle n | \vec{r}_a | 0 \rangle) (\vec{v} \langle n | x_a | 0 \rangle) + \\ + v^2 \omega_{n0}^2 |\langle n | x_a | 0 \rangle|^2 \rightarrow S(k_\perp) = \left( k_\perp^2 + \frac{\omega_{n0}^2}{v^2 \gamma^2} \right) |\langle n | x_a | 0 \rangle|^2 \approx k_\perp^2 |\langle n | x_a | 0 \rangle|^2, \quad (16)$$

которое, на самом деле, уже было учтено выше в (12) посредством перехода в функции рассеяния от полного передаваемого импульса к поперечному. Заметим, что при больших импульсах, не допускающих разложения (15), учет вклада атомного тока в (9) проводится с применением использованного Г. Бете в работе [6] правила сумм матричных элементов без их разложения [6; 7] и также приводит лишь к релятивистским поправкам, чего можно ожидать и из сравнения членов суммы под интегралом этого выражения.

### Интегрирование по переданному импульсу в случае кристалла

В отличие от случая аморфной среды, соответствующего нулевому значению когерентно передаваемого импульса, расчет аналога функции рассеяния (13) при ненулевом значении в полном объеме не проводился, и только первое слагаемое ее разложения

$$S(\vec{k}_\perp, \vec{g}) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \langle 0 | \sum_a e^{i\vec{k}_\perp \vec{r}_a} | n \rangle \langle n | \sum_b e^{-i\vec{k}_\perp \vec{r}_b} | 0 \rangle = \\ = F(g) + \sum_{a \neq b} \langle 0 | e^{i\vec{k}_\perp \vec{r}_a - i\vec{k}_\perp \vec{r}_b} | 0 \rangle - F(k_+) F(k_-), \quad (17)$$



соответствующее когерентному рассеянию в отсутствие обменных эффектов, рассматривалось в теории ионизационных потерь в кристаллах [13; 14]. Отсутствие зависимости от переменной  $\vec{k}$  позволяет вынести формфактор  $F(g)$  из-под знака интеграла (12) и получить в пределе  $k_0 \gg g$

$$\int_{|\vec{k}| < k_0} \frac{\vec{k}_+ \vec{k}_-}{k_-^2 k_+^2} d^2 k_\perp \approx \pi \left( \ln \frac{k_0^2}{g^2} + \frac{g^2}{4k_0^2} \right). \quad (18)$$

Предполагая в дальнейшем, что интегрирование по поперечному импульсу далеко экстраполируется в релятивистскую область, будем пренебрегать последним слагаемым (18). Что касается второго слагаемого (17), то, поскольку имеющиеся расчетные данные [17–19] не позволяют выделить информацию о когерентном обменном рассеянии, при когерентной передаче импульса (11) будем аппроксимировать его данными об обменном рассеянии в аморфной среде (13) с помощью анзаца

$$\sum_{a \neq b} \langle 0 | e^{i\vec{k}_- \vec{r}_a - \vec{k}_+ \vec{r}_b} | 0 \rangle \rightarrow \sqrt{(S(k_+) + F^2(k_+) - Z)(S(k_-) + F^2(k_-) - Z)}. \quad (19)$$

Переходя к выяснению роли продольной передачи импульса вблизи порога реакций возбуждения и ионизации атома при стремлении к нулю векторов  $\vec{k}_\pm = \vec{k} \pm \frac{\vec{g}}{2}$ , заметим, что, поскольку произведение  $\vec{k}_+ \vec{k}_- = k_y^2 \pm \vec{g} \vec{k}_\mp$  содержит лишь поперечные компоненты векторов  $\vec{k}_\mp$ , при интегрировании по азимутальному углу разложения

$$\langle n | e^{\pm i\vec{k}_\mp \vec{r}} | 0 \rangle \approx e^{-i\vec{g}\vec{r}} \vec{k}_\mp \langle n | \vec{r} | 0 \rangle$$

матричных элементов по степеням стоящих в экспоненте малых векторов  $\vec{k}_\mp$ ,  $|\vec{k}_\mp| \ll g$ , также сохраняются лишь вклады их поперечных компонент, вследствие чего оказывается возможным пренебречь продольной компонентой импульса в интеграле (8) от функции рассеяния (17).

Остается пояснить, что токовый вклад в матричный элемент (9), как и ранее, приводит к релятивистским поправкам к выражению (8). Например, линейный вклад по току обуславливает появление поправки  $\frac{ZF(g)k_\perp^2}{m^2}$  к первому слагаемому (17), которой, однако, следует пренебречь наряду с другими релятивистскими поправками к формуле (8). Таким образом, после подстановок (13) и (17)–(19) выражение (12) позволяет рассчитать средний квадрат угла некогерентного рассеяния на траектории классической ультрарелятивистской частицы в нерелятивистском приближении, описывая все релятивистские эффекты в рассеянии с помощью резерфордского сечения.

### Средний квадрат угла некогерентного электронного рассеяния при плоскостном каналировании

В качестве простого актуального примера применения развитого подхода рассмотрим случай плоскостного каналирования, используемого в приложениях [2–5]. Будем при этом полагать, что направление движения каналированных частиц достаточно удалено от направлений образующих плоскости атомных цепочек, пренебрегая соответствующими когерентными передачами импульса. В этом случае набор векторов обратной решетки

$$g_i = \frac{2\pi}{d} i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

является одномерным и определяется межплоскостным расстоянием  $d$ . Поскольку при рассмотрении приложений и проверке теоретических подходов интерес может представлять некогерентное рассеяние как в плоскости каналирования  $xz$ , так и в перпендикулярной ей плоскости локализации атомов  $yz$ , нам понадобятся интегралы

$$\int_{|\vec{k}| < k_0} \frac{k_x^2 - \frac{g^2}{4}}{k_-^2 k_+^2} d^2 k_\perp \approx \frac{\pi}{2} \left( \ln \frac{k_0^2}{g^2} - 1 \right), \quad (20)$$

$$\int_{|\vec{k}| < k_0} \frac{k_y^2}{k_-^2 k_+^2} d^2 k_\perp \approx \frac{\pi}{2} \left( \ln \frac{k_0^2}{g^2} + 1 \right). \quad (21)$$



Переходя от поперечных компонент импульса к углам рассеяния  $\theta_{x,y} = \frac{\Delta p_{x,y}}{p}$  в плоскостях  $xz$  и  $yz$ , для их средних квадратов, накапливающихся на единичной длине в точке траектории с поперечной координатой  $b \rightarrow x$ , из формул (12), (17), (19)–(21) получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \theta_{x,y}^2(x) \rangle}{dz} = \frac{4\pi\alpha^2 n_{at}}{v^2 p^2} & \left\{ Z \ln \frac{k_{\perp \max}}{k_0} + \frac{1}{2} \int_0^{k_0^2} \frac{S(k_{\perp}^2) k_{\perp}^2 dk_{\perp}^2}{(k_{\perp}^2 + \omega_{n0}^2)^2} + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-g_i^2 u_1^2}{2}\right) \cos(g_i x) \times \right. \\ & \times \left[ F(g_i) \left( \ln \frac{k_0}{g_i} \mp \frac{1}{2} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \int \frac{S(\vec{k}_{\perp}, g_i \vec{n}_x) - F(g_i)}{\left( k_{\perp}^2 + \frac{g_i^2}{4} + \omega_{pl}^2 \right)^2 - (k_x g_i)^2} \left\{ \begin{matrix} k_x^2 - \frac{g_i^2}{4} \\ k_y^2 \end{matrix} \right\} \frac{1}{\pi} d^2 k_{\perp} \right] \Bigg\} \equiv \\ & \equiv \frac{4\pi\alpha^2 Z_{sc}^2}{v^2 p^2} n_{sc}(x) \ln \left( \frac{k_{\perp \max}}{k_{\text{eff}}(x)} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

в котором, считая межплоскостной потенциал симметричным, мы положили  $F(g) = F(-g)$ . Поясним, что вследствие присутствия плазменной частоты в знаменателе и экспоненциального убывания форм-факторов при  $k > k_0$  пределы второго интеграла можно считать бесконечными.

В целях упрощения формулировки общей картины некогерентного рассеяния частиц в кристаллах в последней строке (22) введен эффективный минимальный передаваемый импульс  $k_{\text{eff}}(x)$ , а сама искомая величина представлена в форме, применимой как для электронов ( $Z_{sc} = 1$ ), так и для ядер<sup>4</sup> ( $Z_{sc} = Z$ ), если под  $n_{sc}(x)$  понимать соответствующую концентрацию. После выделения последней эффективный минимальный импульс  $k_{\text{eff}}(x)$  будет полностью аккумулировать влияние нелокальных эффектов на рассеяние, не завися при этом от параметров  $k_0$ ,  $k_{\perp \max}$  и энергии частиц. Пространственное поведение величины  $k_{\text{eff}}(x)$  (кэВ/с), рассчитанной для плоскости (110) кристалла кремния, иллюстрирует рис. 1.

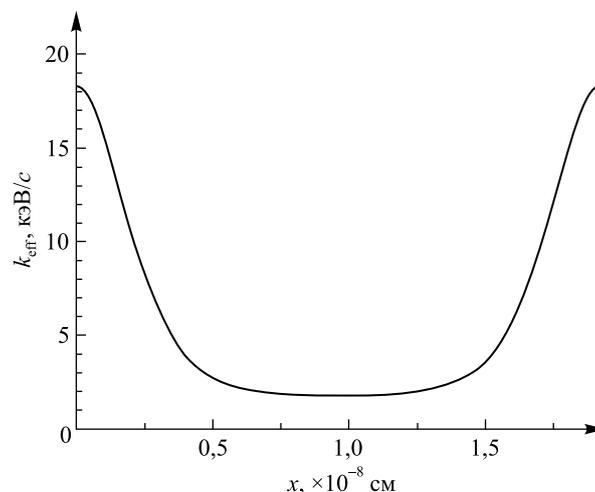


Рис. 1. Зависимость эффективного минимального импульса от расстояния  $x$  до атомной плоскости, рассчитанная для кристаллографической плоскости (110) кристалла кремния

Fig. 1. The dependence of the effective minimum momentum on the distance  $x$  to the atomic plane, calculated for the crystallographic plane (110) of silicon crystal

<sup>4</sup>Для ядерного рассеяния аналогичное представление использовано в препринте автора arXiv:2103.03141v1 (Tikhomirov V. V. Relativistic particle incoherent scattering by the nuclei of crystal plane atoms [Electronic resource]. URL: <https://arxiv.org/abs/2103.03141v1> (date of access: 04.05.2021)).



Развиваемый подход является альтернативой локальному описанию [25; 26] некогерентного электронного рассеяния выражением

$$\frac{d\langle\theta^2\rangle}{dz} = \frac{2m}{p^2} \left( \frac{dE}{dz} \right)_{am} \frac{n_e(x)}{n_0} \approx \frac{8\pi e^4 n_e(x)}{v^2 p^2} \left( \ln \frac{2m\gamma}{I} - 1 \right). \quad (23)$$

Вытекая из формулы для удельных ионизационных потерь энергии в аморфном веществе  $\left( \frac{dE}{dz} \right)_{am}$  [16], выражение (23) наследует в качестве нижнего предела среднюю атомную энергию (энергию ионизации) теории Бете – Блоха [6; 7]  $I = 16Z^{0,9} \approx 172$  эВ. По этому поводу важно отметить, что, как подчеркнuto в работе [15] и отражено формулой (6), при корректном учете эффекта плотности в формуле для удельных ионизационных потерь должна использоваться не средняя атомная частота (энергия), а плазменная. В любом случае, поскольку импульс  $k_{\text{eff}}(x) > 1,75$  кэВ/с  $> 10I/c$  оказывается ближе к минимальному импульсу обратной решетки  $g_1 = \frac{2\pi}{d} \approx 6,5$  кэВ/с, чем к значительно меньшему импульсу  $I/c = 16Z^{0,9}/c \approx 172$  эВ/с и тем более к величине  $\omega_{pl}/c \approx 31$  эВ/с, описание процесса передачи импульса вблизи нижнего предела интегрирования (22) существенно отличается от описания ионизационных потерь в работах [25; 26] на основе формулы (23). Выражаемое этим отличием сокращение роли малых передач поперечного импульса по сравнению с процессом ионизации объясняется интерференционными эффектами в когерентном рассеянии, приводящими к появлению логарифма  $\ln \frac{k_0}{g_i}$ , который содержит импульс  $g_i \gg I/c$ , а также наличием множителей  $k_{x,y}^2$  под знаком интеграла (22) и степенным спаданием функции рассеяния (16).

Используемый в работах [25; 26] метод совмещает учет рассеяния на углы, превышающие, в том числе многократно, угол каналирования, и порождаемой рассеянием на меньшие углы медленной диффузии частиц по поперечной энергии, что также отличает его от предложенного автором [29] отдельного теоретического описания и моделирования этих процессов. В случае электронного рассеяния оба они существенно упрощаются при условии  $k_0 < \sqrt{2V_0\epsilon}$ , выполняющемся уже при энергиях позитронов, превышающих 1 ГэВ, когда отличие сечения рассеяния от резерфордовского сечения проявляется только при импульсах  $k_{\perp} < k_0 < \sqrt{2V_0\epsilon}$ , меньших импульсов  $k \geq \sqrt{2V_0\epsilon}$ , однократная передача которых существенно возмущает траектории каналированных частиц. При этом дополняющий рассеяние на большие углы процесс диффузного деканалирования характеризуется получаемым подстановкой верхнего предела  $k_{\perp \max} = \sqrt{2V_0\epsilon}$  в формулу (22) средним квадратом угла рассеяния

$$\frac{d\langle\theta_{x,y}^2(x)\rangle_{\text{dech}}}{dz} \approx \frac{4\pi\alpha^2 Z_{sc}^2}{v^2 p^2} n_{sc}(x) \ln \left( \frac{\sqrt{2V_0\epsilon}}{k_{\text{eff}}(x)} \right), \quad (24)$$

подлежащим сравнению с величиной (23). Моделирование электронного рассеяния осуществляется на основе резерфордовского сечения с учетом ограничения  $k > k_{\text{eff}}(x)$  на передаваемый импульс и не требует использования не всегда корректно определяемого [30] понятия длины деканалирования. При этом скачкообразные изменения траектории, происходящие при высоких энергиях через значительное количество периодов каналирования, адекватно моделируются передачами импульса  $k > k_0$ , описывая как стохастические изменения траекторий частиц в условиях каналирования, так и «катастрофические» процессы деканалирования при передачах  $k > \sqrt{2V_0\epsilon}$  вплоть до рассеяния на углы, определяемые размерами и структурой ядра. Подобно диффузному, этот процесс может быть качественно описан экспоненциальным законом, декремент которого оценивается на основе сечения Резерфорда.

Логарифм выражения (24) в предложенном автором подходе служит альтернативой логарифму в формуле (23). Для сравнения предсказаний, сделанных на основе этих выражений, на рис. 2 и 3 рассматриваются случаи позитронов с энергией 2 ГэВ, оптимальной для использования в кристаллических ондуляторах<sup>5</sup>, и случаи протонов с энергией 1 ТэВ, иллюстрирующий ситуацию, типичную как для вывода высокоэнергетических пучков из накопителей, так и для готовящегося эксперимента [4] по измерению электромагнитных моментов короткоживущих частиц. При этом, поскольку на рис. 2 и 3 сравниваются случаи рассеяния в плоскости каналирования  $xz$ , результаты расчета по формуле (23) для суммы квадратов углов рассеяния в обоих поперечных направлениях были разделены на два.

<sup>5</sup>Tikhomirov V. V. A benchmark construction of positron crystal undulator [Electronic resource]. URL: <https://arxiv.org/abs/1502.06588v1> (date of access: 04.05.2021).

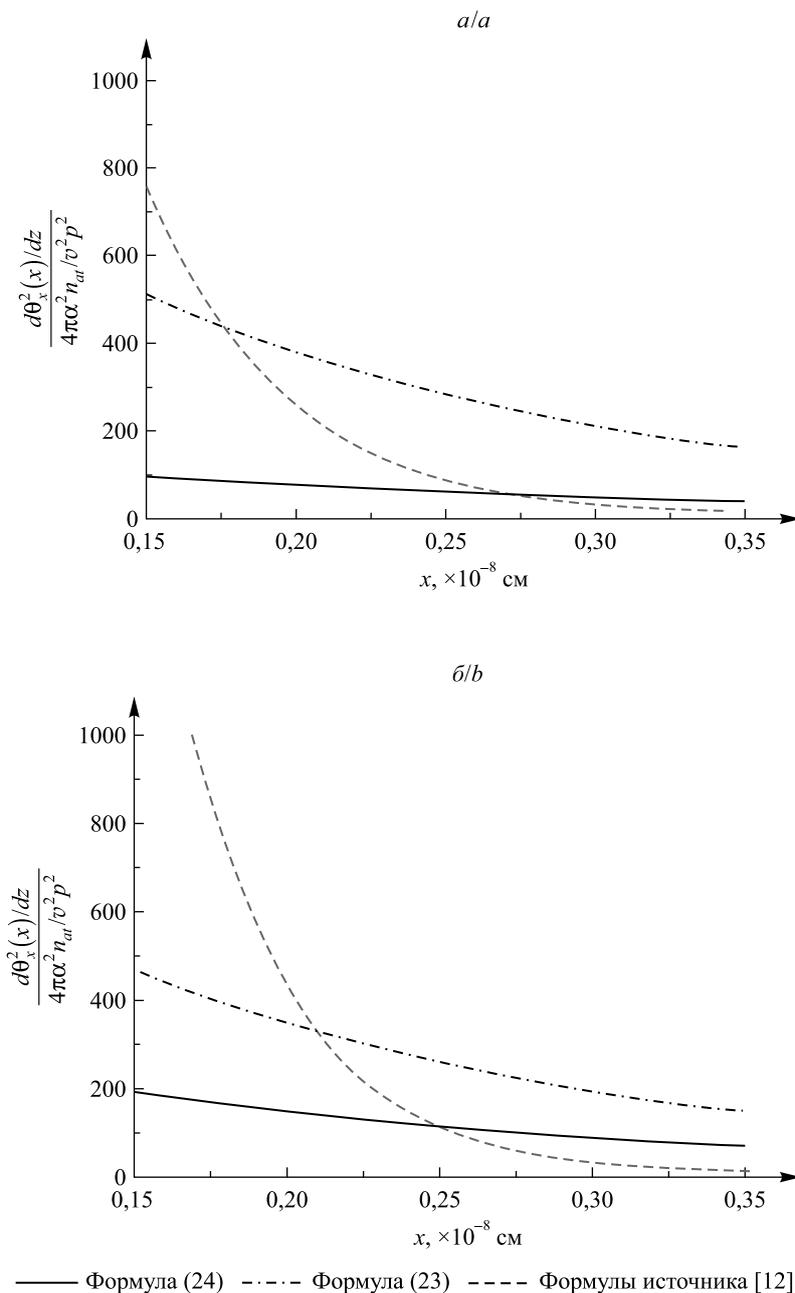


Рис. 2. Рассчитанные для позитронов с энергией 2 ГэВ (а) и протонов с энергией 1 ТэВ (б) зависимости средних квадратов углов некогерентного рассеяния на единичной длине от расстояния до атомной плоскости (110) кристалла кремния, вычисленные по формулам (23), (24) для рассеяния на электронах и по формулам работы [12] для рассеяния на ядрах. Все величины выражены в единицах, определяемых множителем фигурной скобки в формуле (22)

Fig. 2. The mean squares of incoherent scattering angles at a unit length for electron scattering according to equations (23), (24) and for scattering at nuclei according to the formulas of [12] calculated for positron energy 2 GeV (a) and proton energy 1 TeV (b) as a function of the distance to the atomic plane (110) of silicon crystal. All quantities are expressed in the natural unit determined by the multiplier of the curly bracket in equation (22)

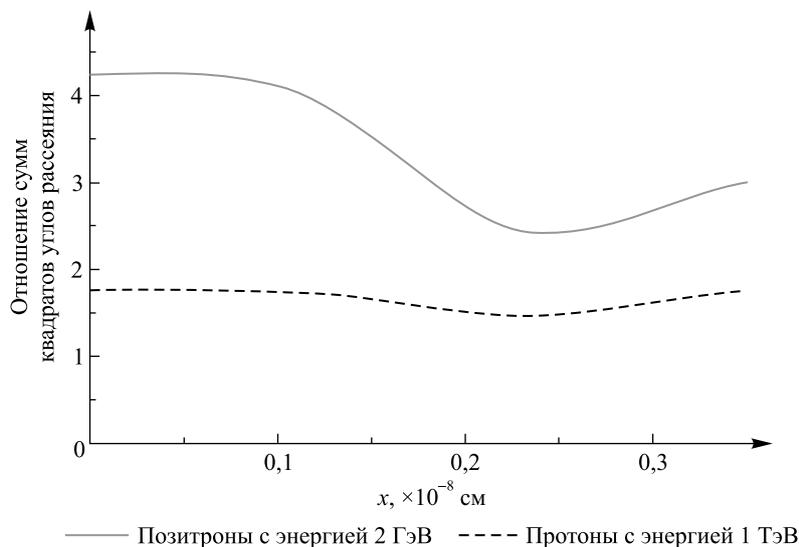


Рис. 3. Рассчитанные для позитронов с энергией 2 ГэВ и протонов с энергией 1 ТэВ зависимости отношения суммы квадратов углов некогерентного рассеяния на электронах и ядрах, вычисленной по формуле (23) для электронного рассеяния и в соответствии с работой [26] для ядерного рассеяния, к аналогичной сумме, найденной по формуле (24) для электронного рассеяния и в соответствии с работой [12] для ядерного рассеяния, от расстояния до атомной плоскости (110) кристалла кремния

Fig. 3. The dependences of the ratio of the sum of squares of the angles of incoherent scattering by electrons and nuclei calculated using the formula (23) for electron and in accordance with reference [26] for nuclear scattering to the analogous sum calculated by the formula (24) for electron and in accordance with reference [12] for nuclear scattering for the cases of positrons of energy 2 GeV and protons of energy 1 TeV on the distance to the atomic plane (110) of the silicon crystal

Следует пояснить, что на рис. 2 и 3 представлена наиболее важная область поперечного движения, характеризующаяся сравнимыми интенсивностями некогерентного рассеяния на электронах и ядрах, в которой происходит переход от стабильного каналирования к ускоренному ядерному деканалированию. Рисунки 2 и 3 демонстрируют соответственно четырех- и двукратное отличие предсказаний рассматриваемых подходов к электронному рассеянию при энергиях 2 ГэВ и 1 ТэВ. Источником заметной энергетической зависимости отличий предсказаний обсуждаемых подходов является то, что в аргументы логарифмов формул (23) и (24) входят разные соотношения  $\gamma = \frac{\epsilon}{m}$  и  $\sqrt{2V_0\epsilon}$ .

Для исследования устойчивости каналированного движения принципиальную роль играет соотношение электронного и ядерного рассеяния в области исчезающе малых пространственных плотностей ядер, также иллюстрируемой рис. 2. В связи с этим отметим, что предложенный автором подход к ядерному рассеянию [11; 12], как и согласующийся с ним в принципиальных моментах подход профессора Й. Оцуки и его учеников [21; 27], также существенно отличается от используемого в публикациях [25; 26]. В основе работ [11; 12] лежит учет влияния когерентного рассеяния на некогерентное, последствия которого недавно были продемонстрированы экспериментально [28]. Помимо этого, указанные работы обеспечили последовательное описание нелокального характера некогерентного рассеяния, наиболее ярко проявляющегося в заметном вкладе рассеяния на основной массе ядер атомных цепочек и плоскостей в области  $x > 3u_1$  их исчезающе малой концентрации, в результате которого ядерное рассеяние вместо резкого спада с понижением последней продолжает оставаться сравнимым с электронным (штриховые линии на рис. 2). Рисунок 3 иллюстрирует отношение предсказаний сумм квадратов углов некогерентного рассеяния на ядрах и электронах, рассчитанных на основании работ [25; 26] и предложенного автором подхода. Уменьшение этого отношения с ростом энергии также объясняется зависимостью от нее аргумента формулы (24). Таким образом, нами впервые реализовано количественное описание электронного рассеяния, которое позволяет обоснованно сравнить его с ядерным и смоделировать приложения [2–5] эффекта каналирования положительно заряженных частиц.

### Заключение

Получены выражения для среднего квадрата угла некогерентного рассеяния на электронах атомов кристалла, учитывающие данные последовательных расчетов атомной структуры, влияние тепловых колебаний кристаллической решетки, а также эффект плотности, заметно упрощающий рассмотрение.



Все указанные факторы параметризованы единственным, зависящим от поперечных координат, параметром, который имеет смысл нижней границы импульса, передаваемого атомным электронам при возбуждении и ионизации, и дает возможность эффективно разыгрывать некогерентное рассеяние на электронах методом Монте-Карло. Развитый подход позволяет приступить к обоснованному моделированию таких объединяемых необходимостью использования каналирования положительно заряженных частиц в толстых кристаллах приложений, как вывод пучков из ускорителей, измерение электромагнитных характеристик короткоживущих частиц и получение интенсивного узкополосного рентгеновского излучения и гамма-излучения на основе применения кристаллических ондуляторов.

## Библиографические ссылки

1. Барышевский ВГ. *Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях*. Минск: БГУ имени В. И. Ленина; 1982. 256 с.
2. Elsener K, Fidecaro G, Gyr M, Herr M, Klem J, Mikkelsen U, et al. Proton extraction from the CERN SPS using bent silicon crystals. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 1996;119:215–230.
3. Baryshevsky VG. Electromagnetic dipole moments and time reversal violating interactions for high energy charged baryons in bent crystals at LHC. *The European Physical Journal C*. 2019;79:350. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6857-6.
4. Aiola S, Bandiera L, Cavoto G, De Benedetti F, Fu J, Guidi V. Progress towards the first measurement of charm baryon dipole moments. *Physical Review D*. 2021;103:072003. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.072003.
5. Baryshevsky VG, Tikhomirov VV. Crystal undulators: from the prediction to the mature simulations. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 2013;309:30–36. DOI: 10.1016/j.nimb.2013.03.013.
6. Бете Г. *Квантовая механика*. Бонч-Бруевич ВЛ, редактор. Москва: Мир; 1965. 334 с.
7. Ландау ЛД, Лифшиц ЕМ. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*. Москва: Наука; 1974. 752 с. (Теоретическая физика; том 3).
8. Берестецкий ВБ, Лифшиц ЕМ, Питаевский ЛП. *Квантовая электродинамика*. 3-е издание. Москва: Наука; 1989. 728 с. (Теоретическая физика; том 4).
9. Ландау ЛД, Лифшиц ЕМ. *Электродинамика сплошных сред*. 2-е издание. Москва: Наука; 1982. 624 с. (Теоретическая физика; том 8).
10. Jackson JD. *Classical electrodynamics*. 3<sup>rd</sup> edition. New York: Wiley; 1999. 832 p.
11. Tikhomirov VV. Quantum features of high energy particle incoherent scattering in crystals. *Physical Review Accelerators and Beams*. 2019;22(5):054501. Erratum in: *Physical Review Accelerators and Beams*. 2020;23(3):039901. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.22.054501.
12. Тихомиров ВВ. Некогерентное рассеяние ультрарелятивистских частиц на ядрах при плоскостном каналировании. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. 2020;1:83–94. DOI: 10.33581/2520-2243-2020-1-83-94.
13. Esbensen H, Golovchenko JA. Energy loss of fast channeled particles. *Nuclear Physics A*. 1978;298(3):382–396. DOI: 10.1016/0375-9474(78)90140-9.
14. Esbensen H, Fich O, Golovchenko JA, Madsen S, Nielsen H, Schiøtt HE, et al. Random and channeled energy loss in thin germanium and silicon crystals for positive and negative 2-15-GeV/c pions, kaons, and protons. *Physical Review B*. 1978;18:1039–1054.
15. Буренков АФ, Комаров ФФ, Кумахов МА. Энергетические потери заряженных частиц в кристаллах. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1980;78:1474–1489.
16. Zyla PA, Barnett RM, Beringer J, Dahl O, Dwyer DA, Groom DE, et al. Review of particle physics. *Physical Review D: Covering Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*. 2012;86(1):010001. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.010001.
17. Hubbell JH, Veigele WJ, Briggs EA, Brown RT, Cromer DT, Howerton RJ, et al. Atomic form factors, incoherent scattering functions, and photon scattering cross sections. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*. 1975;4:471–538.
18. Feranchuk ID, Gurskii LI, Komarov LI, Lugovskaya OM, Burgazy F, Ulyanenko A. A new method for calculation of crystal susceptibilities for X-ray diffraction at arbitrary wavelength. *Acta Crystallographica A*. 2002;A58:370. DOI: 10.1107/s0108767302007997.
19. Skoromnik OD, Feranchuk ID, Leonau AU, Keitel CH. Analytic model of a multi-electron atom. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2017;50(24):245007. DOI: 10.1088/1361-6455/aa92e6.
20. Fano U. Inelastic collisions and the Moliere theory of multiple scattering. *Physical Review*. 1954;93(1):117–120.
21. Nitta H. Semiclassical theory of dechanneling and the diffusion coefficients. *Physica Status Solidi (b)*. 1985;131(1):75–86. DOI: 10.1002/pssb.2221310106.
22. Ландау ЛД, Лифшиц ЕМ. *Теория поля*. 7-е издание. Москва: Наука; 1988. 512 с. (Теоретическая физика; том 2).
23. Зоммерфельд А. *Строение атома и спектры*. Том 2. Москва: Гостехиздат; 1956. 696 с.
24. Тер-Микаэлян МЛ. *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях*. Ереван: Издательство АН АрмССР; 1969. 343 с.
25. Biryukov VM, Chesnokov YA, Kotov VI. *Crystal channeling and its application at high-energy accelerators*. Berlin: Springer; 2010. 219 p.
26. Scandale W, Taratin AM. Channeling and volume reflection of high-energy charged particles in short bent crystals. Crystal assisted collimation of the accelerator beam halo. *Physics Reports*. 2019;815:1–107. DOI: 10.1016/j.physrep.2019.04.003.
27. Оцуки Ё-Х. *Взаимодействие заряженных частиц с твердыми телами*. Москва: Мир; 1985. 280 с.
28. Mazzolari A, Sytov A, Bandiera L, Germogli G, Romagnoni M, Bagli E. Broad angular anisotropy of multiple scattering in a Si crystal. *The European Physical Journal C*. 2020;80:63. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5400-x.
29. Tikhomirov VV. Simulation of multi-GeV electron energy losses in crystals. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 1989;36(3):282–285. DOI: 10.1016/0168-583X(89)90670-8.
30. Tikhomirov VV. Quantitative theory of channeling particle diffusion in transverse energy in the presence of nuclear scattering and direct evaluation of dechanneling length. *The European Physical Journal C*. 2017;77:483. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5060-x.



## References

1. Baryshevsky VG. *Kanalirovanie, izluchenie i reaktsii v kristallakh pri vysokikh energiakh* [Channeling, radiation and reactions in crystals at high energies]. Minsk: BGU imeni V. I. Lenina; 1982. 256 p. Russian.
2. Elsener K, Fidecaro G, Gyr M, Herr M, Klem J, Mikkelsen U, et al. Proton extraction from the CERN SPS using bent silicon crystals. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 1996;119: 215–230.
3. Baryshevsky VG. Electromagnetic dipole moments and time reversal violating interactions for high energy charged baryons in bent crystals at LHC. *The European Physical Journal C*. 2019;79:350. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6857-6.
4. Aiola S, Bandiera L, Cavoto G, De Benedetti F, Fu J, Guidi V. Progress towards the first measurement of charm baryon dipole moments. *Physical Review D*. 2021;103:072003. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.072003.
5. Baryshevsky VG, Tikhomirov VV. Crystal undulators: from the prediction to the mature simulations. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 2013;309:30–36. DOI: 10.1016/j.nimb.2013.03.013.
6. Bethe HA. *Intermediate quantum mechanics*. New York: Benjamin; 1964. 276 p.  
Russian edition: Bethe H. *Kvantovaya mekhanika*. Bonch-Bruевич VL, editor. Moscow: Mir; 1965. 334 p.
7. Landau LD, Lifshitz EM. *Kvantovaya mekhanika. Nereyativistskaya teoriya* [Quantum mechanics. Non-relativistic theory]. Moscow: Nauka; 1974. 752 p. (Teoreticheskaya fizika; tom 3). Russian.
8. Berestetskii VB, Lifshitz EM, Pitaevskii LP. *Kvantovaya elektrodinamika* [Quantum electrodynamics]. 3<sup>rd</sup> edition. Moscow: Nauka; 1989. 728 p. (Teoreticheskaya fizika; tom 4). Russian.
9. Landau LD, Lifshitz EM. *Elektrodinamika sploshnykh sred* [Electrodynamics of continuous media]. 2<sup>nd</sup> edition. Moscow: Nauka; 1982. 624 p. (Teoreticheskaya fizika; tom 8). Russian.
10. Jackson JD. *Classical electrodynamics*. 3<sup>rd</sup> edition. New York: Wiley; 1999. 832 p.
11. Tikhomirov VV. Quantum features of high energy particle incoherent scattering in crystals. *Physical Review Accelerators and Beams*. 2019;22(5):054501. Erratum in: *Physical Review Accelerators and Beams*. 2020;23(3):039901. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.22.054501.
12. Tikhomirov VV. Incoherent ultrarelativistic particle scattering by nuclei at planar channeling. *Journal of the Belarusian State University. Physics*. 2020;1:83–94. DOI: 10.33581/2520-2243-2020-1-83-94.
13. Esbensen H, Golovchenko JA. Energy loss of fast channeled particles. *Nuclear Physics A*. 1978;298(3):382–396. DOI: 10.1016/0375-9474(78)90140-9.
14. Esbensen H, Fich O, Golovchenko JA, Madsen S, Nielsen H, Schiøtt HE, et al. Random and channeled energy loss in thin germanium and silicon crystals for positive and negative 2-15-GeV/c pions, kaons, and protons. *Physical Review B*. 1978;18:1039–1054.
15. Burenkov AF, Komarov FF, Kumakhov MA. [Energy loss of charged particles in crystals]. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*. 1980;78:1474–1489. Russian.
16. Zyla PA, Barnett RM, Beringer J, Dahl O, Dwyer DA, Groom DE, et al. Review of particle physics. *Physical Review D: Covering Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*. 2012;86(1):010001. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.010001.
17. Hubbell JH, Veigele WJ, Briggs EA, Brown RT, Cromer DT, Howerton RJ, et al. Atomic form factors, incoherent scattering functions, and photon scattering cross sections. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*. 1975;4:471–538.
18. Feranchuk ID, Gurskii LI, Komarov LI, Lugovskaya OM, Burgazy F, Ulyanekov A. A new method for calculation of crystal susceptibilities for X-ray diffraction at arbitrary wavelength. *Acta Crystallographica A*. 2002;A58:370. DOI: 10.1107/s0108767302007997.
19. Skoromnik OD, Feranchuk ID, Leonau AU, Keitel CH. Analytic model of a multi-electron atom. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2017;50(24):245007. DOI: 10.1088/1361-6455/aa92e6.
20. Fano U. Inelastic collisions and the Moliere theory of multiple scattering. *Physical Review*. 1954;93(1):117–120.
21. Nitta H. Semiclassical theory of dechanneling and the diffusion coefficients. *Physica Status Solidi (b)*. 1985;131(1):75–86. DOI: 10.1002/pssb.2221310106.
22. Landau LD, Lifshitz EM. *Teoriya polya* [Field theory]. 7<sup>th</sup> edition. Moscow: Nauka; 1988. 512 p. (Teoreticheskaya fizika; tom 2). Russian.
23. Zommerfel'd A. *Stroenie atoma i spektry. Tom 2* [Atomic structure and spectra. Volume 2]. Moscow: Gostekhizdat; 1956. 696 p. Russian.
24. Ter-Mikaelyan ML. *Vliyanie sredy na elektromagnitnye protsessy pri vysokikh energiakh* [The influence of the environment on electromagnetic processes at high energies]. Erevan: Izdatel'stvo AN ArmSSR; 1969. 343 p. Russian.
25. Biryukov VM, Chesnokov YA, Kotov VI. *Crystal channeling and its application at high-energy accelerators*. Berlin: Springer; 2010. 219 p.
26. Scandale W, Taratin AM. Channeling and volume reflection of high-energy charged particles in short bent crystals. Crystal assisted collimation of the accelerator beam halo. *Physics Reports*. 2019;815:1–107. DOI: 10.1016/j.physrep.2019.04.003.
27. Otsuki E-Kh. *Vzaimodeistvie zaryazhennykh chastits s tverdymi telami* [Interaction of charged particles with solids]. Moscow: Mir; 1985. 280 p. Russian.
28. Mazzolari A, Sytov A, Bandiera L, Germogli G, Romagnoni M, Bagli E. Broad angular anisotropy of multiple scattering in a Si crystal. *The European Physical Journal C*. 2020;80:63. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5400-x.
29. Tikhomirov VV. Simulation of multi-GeV electron energy losses in crystals. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 1989;36(3):282–285. DOI: 10.1016/0168-583X(89)90670-8.
30. Tikhomirov VV. Quantitative theory of channeling particle diffusion in transverse energy in the presence of nuclear scattering and direct evaluation of dechanneling length. *The European Physical Journal C*. 2017;77:483. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5060-x.

Получена 23.06.2021 / исправлена 24.06.2021 / принята 22.07.2021.  
Received 23.06.2021 / revised 24.06.2021 / accepted 22.07.2021.