ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Н.М. Дмитрук, М.А. Готовец

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
{dmitrukn, hatavets}@bsu.by

Введение. Управление по прогнозирующей модели (Model Predictive Control — MPC), является одним из современных методов теории управления [1]. В приложениях, в которых основное внимание уделяется оптимизации экономических параметров (минимизация энергетических затрат, максимизация выпуска, прибыли), применяются методы экономического MPC (EMPC) [1, гл.8]. Цель настоящего сообщения — сравнить различные подходы EMPC при решении ряда задач экономического роста из работы [2].

1. Модель экономического роста. Идеи работы демонстрируются на задаче оптимального экономического роста [2, стр. 17]

$$\max_u \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[\ln(1-u(t)) + \ln(f(x(t)))\right] dt, \tag{1}$$

$$\dot{x} = u(t) f(x(t)) - \mu x(t),\ x(0) = x_0,\ 0 \le u(t) \le 1-\varepsilon,\ t \ge 0,$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}$ — фондовооруженность одного рабочего в момент времени t, $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — производственная функция, $u = u(t) \in \mathbb{R}$ — доля инвестируемого выпуска в момент времени t, $\mu > 0$ — темп роста трудовых ресурсов, $\rho > 0$ — норма дисконтирования.

Методы MPC [1] предполагают построение обратной связи на основе повторяющегося в каждый момент времени $\tau \in \Delta = \{0, h, 2h, \ldots\}$, где h — период квантования, решения прогнозирующей задачи оптимального управления (ОУ) с конечным горизонтом $T = Nh$ ($N \in \mathbb{N}$), в которой начальное условие для прогнозирующей модели совпадает с измеренным состоянием объекта управления, и применении оптимального значения управления $u^0(\tau)$ в момент τ к объекту. Выбор прогнозирующей задачи ОУ зависит от конкретного подхода MPC.

2. Прогнозирующие задачи ОУ. В настоящей работе исследуются три подхода. В первом прогнозирующая задача имеет вид

$$\max_u \int_\tau^{\tau+T} e^{-\rho t} \left[\ln(1-u(t)) + \ln(f(z(t)))\right] dt, \tag{2}$$

$$\dot{z} = u(t)f(z(t)) - \mu z(t),\ z(\tau) = x(\tau),\ 0 \le u(t) \le 1 - \varepsilon,\ t \in [\tau, \tau + T],$$

где через $z = z(t)$ обозначены состояния прогнозирующей модели, чтобы отличать их от состояний объекта $x(t)$, $x(\tau)$ — текущее состояние объекта. Задача (2) не содержит дополнительных ограничений на состояние, выбирается достаточно продолжительный горизонт планирования T. Такой подход соответствует неограниченному MPC [1, гл.4].

Во втором подходе прогнозирующая задача ОУ имеет вид

$$\max_u \int_\tau^{\tau+T} e^{-\rho t} \left[\ln(1 - u(t)) + \ln(f(z(t)))\right] dt, \tag{3}$$

$$\dot{z} = u(t)f(z(t)) - \mu z(t),\ z(\tau) = x(\tau),\ z(\tau + T) = x_s,$$
$$0 \le u(t) \le 1 - \varepsilon,\ t \in [\tau, \tau + T],$$

где x_s — магистральное значение фондовооруженности, которое находится из условия $f'(x) = \rho + \mu$, см. [2]. Таким образом, в задаче (3) добавляется требование окончания процесса точно на магистрали.

Наконец, в третьем подходе в критерий качества добавляется терминальная стоимость W:

$$\max_u\ W(z(\tau + T)) + \int_\tau^{\tau+T} e^{-\rho t} \left[\ln(1 - u(t)) + \ln(f(z(t)))\right] dt, \tag{4}$$

$$\dot{z} = u(t)f(z(t)) - \mu z(t),\ z(\tau) = x(\tau),\ 0 \le u(t) \le 1 - \varepsilon,\ t \in [\tau, \tau + T].$$

В работе обсуждаются достоинства и недостатки EMPC на основе перечисленных прогнозирующих задач (2) – (4), а также предлагается новый подход к построению терминальной стоимости W в задаче (4), в котором обосновывается линейная стоимость $W(z) = \lambda_s z$, где $\lambda_s = 1/f(x_s)(1 - u_s)$, $u_s = \mu x_s / f(x_s)$ — магистральные значения сопряженной переменной и управления, соответственно.

Предложенные подходы демонстрируются также в применении к задаче роста технологического последователя [2, стр. 153] и могут использоваться при решении других экономических задач, обладающих магистральным свойством, например, в задачах оптимизации динамики фирмы [3].

Библиографические ссылки

1. *Grüne L., Pannek J.* Nonlinear Model Predictive Control. Springer, 2017.
2. *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. Труды МИАН, 257. М.: Наука, 2007.

3. *Габасов Р., Габасова О.Р., Дмитрук Н.М.* Синтез оптимальной политики для производственно-финансовой модели фирмы II. Программные и позиционные решения // Автоматика и телемеханика. 1998. № 10. С. 95–112.

ИМПУЛЬСНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ НАВЕДЕНИЕМ МЕХАНИЗМА ПЕРЕГРУЗКИ ТОПЛИВНЫХ СБОРОК

Ю.Ф. Долгий[1,2], А.Н. Сесекин[1,2], О.Л. Ташлыков[2], Д.Р. Кувшинов[2]

[1] Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

[2] Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
`yurii.dolgii@imm.uran.ru, a.n.sesekin@urfu.ru`

Введение. Система перегрузки реактора БН-600 предназначена для перегрузки топливных сборок и состоит из совокупности узлов, обеспечивающих наведение механизма перегрузки в заданное положение [1]. На корпусе реактора расположены две поворотные пробки, меньшая из них расположена внутри большой пробки. На меньшей пробке размещен механизм захвата топливной сборки. В данной работе рассматривается задача наведения захвата, расположенного на меньшей пробке, на заданную топливную сборку, которая описывается нелинейной управляемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Для ее решения в [2] использовался метод разделения движений поворотных пробок. Если центр масс меньшей пробки лежит на ее оси вращения, то управляемая система линейна. Решение задачи быстродействия для нее предложено в [3]. В данной работе при решении нелинейной задачи используются импульсные управления.

1. Постановка задачи. Кинетическая энергия поворотного механизма определяется формулой

$$T = \frac{1}{2}\left(J_1 + m_2 e_2^2\right)\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\right)^2$$

$$+m_2 e_2 a_2 \cos(\varphi_2)\dot{\varphi}_1\left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\right),$$

где J_1, J_2 — моменты инерции большой и малой пробок относительно их осей вращения, e_2 — расстояние между осями вращения пробок, a_2 — расстояние от оси вращения малой пробки до ее цента масс, m_2 — масса малой пробки, φ_1 — угол поворота большой пробки, φ_2 — угол поворота малой пробки относительно большой. Механизм перегрузки