$$V_{i(n-1)} = \int_0^{x_{i(n-1)}} A_{i(n-1)}(x_{(i+1)(n-1)}, x_{i(n-1)}, x_{in})dx_{i(n-1)}+$$
$$+\int_0^{x_{(i+1)(n-1)}} B_{(i+1)(n-1)}(x_{(i+1)(n-1)}, 0, x_{in})dx_{(i+1)(n-1)},\ i=\overline{1,m-2},$$
$$V_{(m-1)j} = \int_0^{x_{(m-1)j}} A_{(m-1)j}(x_{mj}, x_{(m-1)j}, x_{(m-1)(j+1)})dx_{(m-1)j}+$$
$$+\int_0^{x_{(m-1)(j+1)}} C_{(m-1)(j+1)}(x_{mj}, 0, x_{(m-1)(j+1)})dx_{(m-1)(j+1)},\ j=\overline{1,n-2},$$
$$V_{(m-1)(n-1)} =$$
$$= \int_0^{x_{(m-1)(n-1)}} A_{(m-1)(n-1)}(x_{m(n-1)}, x_{(m-1)(n-1)}, x_{(m-1)n})dx_{(m-1)(n-1)}.$$

Приводятся иллюстрирующие примеры.

Заметим, что функционал вида (3) возникает при дискретизации двойного интеграла по прямоугольнику с подынтегральной функцией, зависящей от частных производных первого порядка.

Как показано в [1], в общем случае нет связи между разрешимостью обратной задачи вариационного исчисления и разрешимостью обратной задачи оптимизации для соответствующего дискретного по времени аналога.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00202).

Библиографические ссылки

1. *Kurina G., Zadorozhniy V.* Inverse problems of the calculus of variations for discrete-time systems // Pure and Applied Functional Analysis. 2016. Vol. 1. No. 4. P. 573–582.

ГЛОБАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

А.А. Леваков, М.М. Васьковский

Белорусский государствнный университет, Минск, Беларусь
levakov@tut.by, vaskovskii@bsu.by

Пусть заданы ограниченные полунепрерывные сверху многозначные отображения $F : R^d \to \mathrm{conv}\,(R^d)$, $G : R^d \to \mathrm{cl}\,(R^{d\times d})$, $0 \in F(0)$, $0 \in G(0)$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное включение

$$dx(t) \in F(x(t))dt + G(x(t))dW(t), \qquad (1)$$

где $W(t)$ – d-мерное броуновское движение. Построим многозначное отображение $x \to A(x) = \{bb^\top : b \in G(x)\}$. Пусть $A(x) \in$

$\mathrm{conv}\,(R^{d\times d})$ $\forall x \in R^d$. Предполагаем, что выполняется следующее **условие l)**: существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $V : R^d \to R_+$ такая, что

$$DV(x) = \sup_{b\in F(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial x} b + \sup_{a\in A(x)} \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} a\right) \le 0 \ \forall x \in R^d.$$

Положим $N_V = \{x \in R^d : DV(x) = 0\}$. Будем говорить, что слабое решение $x(t), t \in R$, определенное на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, принадлежит множеству N_V, если

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial x} v(t) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 V(x(t))}{\partial x^2} u(t) u^\top(t)\right) = 0$$

для $(\mu \times P)$-почти всех $(t, \omega) \in R \times \Omega$.

Пусть $\mathcal{P}$ — совокупность всех вероятностей на $(R^d, \beta(R^d))$, d — метрика Леви–Прохорова на $\mathcal{P}$, $x(t)$— слабое решение включения (1), $P^{x(t)}$— распределение вероятностей случайной величины $x(t)$. Отображение $\varphi_x : R_+ \to \mathcal{P}$, где $\varphi_x(t) = P^{x(t)}$, называем *движением* включения (1), соответствующим слабому решению $x(t)$, а множество $\varphi_x(R_+) = \{y \in \mathcal{P} : y = \varphi_x(t),\, t \in R_+\}$— *траекторией движения* φ_x.

Точку q называем *ω-предельной* для движения $\varphi_x : [t_0, +\infty) \to \mathcal{P}$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $d(\varphi_x(t_n), q) \to 0$, $n \to +\infty$. Обозначим через $\Omega(\varphi_x)$ множество всех ω-предельных точек для движения φ_x. Движение называется *предкомпактным*, если его траектория относительно компактна в $(\mathcal{P}, d)$.

Лемма 1. *Пусть слабому решению* $x(t)$ *включения* (1) *соответствует предкомпактное движение* φ_x, $\|x(0)\| \le K$ *п. н.*, $K \in R_+$. *Тогда выполнены утверждения:* 1) *множество* $\Omega(\varphi_x)$ *непусто и для любой точки* $b \in \Omega(\varphi_x)$ *существует слабое решение* $\hat{x}(t)$ *на* R *включения* (1), *принадлежащее множеству* M_V *такое, что* $P^{\hat{x}(0)} = b$; 2) $d(\varphi_x(t), \Omega(\varphi_x)) \to 0$ *при* $t \to +\infty$; 3) $x(t) \underset{t\to\infty}{\overset{P}{\to}} \overline{\mathrm{supp}\quad \Omega(\varphi_x)}$.

Определение 1. *Нулевое решение называют устойчивым по вероятности, если для любых* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ *такое, что для любого слабого решения* $x(t)$ *с* $\|x(0)\| \le \delta$ *п. н. имеем* $P\{\sup_{t\ge 0} \|x(t)\| \ge \varepsilon_1\} \le \varepsilon_2$.

Определение 2. *Нулевое решение называется глобально асимптотически устойчивым по вероятности, если: а) оно устойчиво по вероятности; б) для любого* $K > 0$, *для любого слабого решения* $x(t)$, *для которого* $\|x(0)\| < K$ *п. н., выполняется* $x(t) \underset{t\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0$.

Определение 3. *Нулевое решение называется ϖ-устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого слабого решения $x(t)$ уравнения, для которого $\|x(0)\| \le \delta$ п. н., имеем $E(\|x(t)\|^{\varpi}) \le \varepsilon \ \forall t \ge 0$.*

Определение 4. *Нулевое решение называется глобально асимптотически (ϖ, ϖ_1)-устойчивым, если: а) оно ϖ-устойчиво; б) для любого $K > 0$, для любого слабого решения $x(t)$, для которого $\|x(0)\| \le K$ п. н., выполняется $\lim\limits_{t \to +\infty} E(\|x(t)\|^{\varpi_1}) = 0$.*

Теорема 1. *Пусть для включения* (1) *выполняется условие* l), *и пусть функция $V(x)$ в этом условии положительно определенная. Тогда нулевое решение включения* (1) *устойчиво по вероятности. Если, кроме того, $V(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$, и множество N_V не содержит ненулевых слабых решений на R, то нулевое решение глобально асимптотически устойчиво по вероятности.*

Теорема 2. *Пусть для включения* (1) *выполняется условие* l), *и функция $V(x)$ в этом условии удовлетворяет неравенствам: $k\|x\|^{\varpi_1} \le V(x) \ \forall x, \|x\| \ge a$; $k_1\|x\|^{\varpi} \le V(x) \ \forall x, \|x\| \le b$, где $\varpi, \varpi_1, k, k_1, a, b$ — положительные постоянные. Если не существует ненулевых слабых решений на R включения* (1), *принадлежащих множеству N_V, то нулевое решение является глобально асимптотически (ϖ, ϖ_1)-устойчивым.*

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАЗГОНА ЛЫЖНИКА НА ПРЯМОЛИНЕЙНОМ СКЛОНЕ

Б.Я. Локшин, В.А. Самсонов

НИИ механики МГУ, Москва, Россия
{blokshin, samson}@imec.msu.ru

Введение. Первым этапом в спортивных соревнованиях по прыжкам с трамплина является разгон лыжника до момента отталкивания. В процессе этого разгона лыжник принимает определенную позу и старается поддерживать ее в процессе спуска при возрастающей скорости за счет вырабатываемых моментов в суставах. Построение модели движения лыжника именно по прямолинейному склону представляет определенный интерес как с практической точки зрения, так и в качестве теоретико-механической задачи. В имеющейся научной литературе лыжника обычно представляют как материальную точку [1 – 3]