3. Поимка жестко скоординированных убегающих. В данном разделе считаем, что все убегающие используют одно и то же управление.

Теорема 4. *Пусть* $0 \in \mathrm{Intco}\{x_i^0 - y_j^0, i \in I, j \in J, p_1, \ldots, p_r\}$, $n \geqslant k$. *Тогда в игре* $\Gamma(n, m)$ *происходит поимка хотя бы одного убегающего.*

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект FEWS -2020-0010 и РФФИ (проект 20-01-00293).

О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ ДЕКОМПОЗИЦИИ БАЗИСНЫХ ГРАФОВ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ ОДНОРОДНЫХ ПОТОКОВ В СЕТЯХ

Л.А. Пилипчук, Е.Н. Полячок, С.А. Ковалевский

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
{pilipchuk, fpm.polyachoEN1, fpm.kovalevsSA}@bsu.by

Задача минимизации размера множества M обозреваемых узлов сети с целью локализации специальных программируемых устройств (сенсоров) для сбора необходимой информации о функции потока [1, 2] относится к классу NP-полных задач [3]. Поиск оптимального решения (минимального числа обозреваемых узлов) с применением стратегий полного перебора сенсорных конфигураций узлов исследуемого класса NP-полных задач потребует огромных вычислительных затрат [3, 4]. Для больших сетей актуальной прикладной проблемой является поиск приемлемого числа обозреваемых узлов, что гарантировало бы ее полную наблюдаемость (субоптимальное решение) [4].

Введем в рассмотрение конечный, связный, ориентированный двунаправленный граф (сеть) $G = (I, U)$, где множество дуг U определено на прямом произведении $I \times I$, $|I| < \infty$, $|U| < \infty$. Обозначим x_{ij} – неизвестный дуговой поток дуги $(i, j) \in U$. Двунаправленный граф G обладает следующим свойством: если существует дуга $(i, j) \in U$ с дуговым потоком x_{ij}, то существует и дуга $(j, i) \in U$ с дуговым потоком x_{ji}. Функция потока $x : U \to R$ удовлетворяет следующей системе:

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} 0, & i \in I \setminus I^*, \\ x_i, & i \in I^*, \end{cases} \qquad (1)$$

где x_i — внешний поток узла $i \in I^* \subseteq I$, x_{ij}, — дуговой поток на дуге $(i,j) \in U$, $I_i^+(U) = \{j \in I : (i,j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j \in I : (j,i) \in U\}$. Для внешнего потока выполняется условие: $\sum_{i \in I^*} x_i = 0$. Для каждой дуги (i,j) известна доля $p_{ij} \in (0,1]$ суммарного потока $\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}$, проходящего через дугу $(i,j) \in U$. Для каждого узла $i \in I$ определим *каноническую* дугу (i,k), где $k \in I_i^+(U)$ и $p_{ik} \neq 0$. Заметим, что при заданных ограничениях канонической дугой может быть любая дуга, исходящая из узла i. Поскольку граф G — двунаправленный и $p_{ij} \in (0,1]$, $(i,j) \in U$, то для каждого узла $i \in I$ существует каноническая дуга (i,k), $k \in I_i^+(U)$ с ненулевым дуговым потоком x_{ik}.

В результате размещения специальных программируемых устройств (сенсоров) в обозреваемых узлах $M \subseteq I$ графа G получена следующая информация о функции потока:

$$\begin{gathered} x_{ij} = f_{ij}, j \in I_i^+(U),\ \ x_{ji} = f_{ji}, j \in I_i^-(U),\ i \in M; \\ x_i = f_i,\ i \in M \bigcap I^*; \end{gathered} \tag{2}$$

$$x_{ij} = \beta_{ij} f_{ik},\ \beta_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{ik}},\ j \in\ I_i^+(U) \setminus \{k\},\ i \in I_k^-(U),\ k \in M. \tag{3}$$

Заметим, что в соотношении (3) $|I_i^+(U) \setminus \{k\}| \geq 1$.

По заданному множеству $M \subseteq I$ обозреваемых узлов графа G построим граф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ — ненаблюдаемую часть графа G. Удалим из графа G дуги и узлы, для которых известны численные значения (2), (3). Система для вычисления неизвестных дуговых потоков $x_{ij}, (i,j) \in \overline{U}$ и $x_i, i \in \overline{I}^* \subseteq I^*$ графа $\overline{G}$ примет следующий вид:

$$\sum_{j \in I_i^+(\overline{U})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(\overline{U})} x_{ji} = \left\{ \begin{array}{cc} a_i, & i \in \overline{I} \setminus \overline{I}^*, \\ x_i + a_i, & i \in \overline{I}^*; \end{array} \right. \tag{4}$$

$$x_{ij} = \beta_{ij} x_{ik},\ \beta_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{ik}},\ j \in\ I_i^+(\overline{U}) \backslash \{k\},\ |I_i^+(\overline{U})| > 1, i \in \overline{I}, \tag{5}$$

где $a_i, i \in \overline{I}$ — константы, полученные из системы (1) на основании априорной информации (2), (3), (i,k) — канонические дуги для узлов $i \in \overline{I}$.

Разреженная система (4), (5), сформированная по заданному множеству $M \subseteq I$ обозреваемых узлов графа G для определения дуговых потоков $x_{ij}, (i,j) \in \overline{U}$ и внешнего потока $x_i, i \in \overline{I}^*$ в узлах ненаблюдаемой части сети $\overline{G}$, может быть 1) *недоопределенной,* 2) *переопределенной,* или имеет 3) *единственное решение.* В [5] разработана конструктивная теория декомпозиции базисных графов для решения разреженных недоопределенных систем (4), (5). В случаях 1), 2) необходимо определить новое множество M обозреваемых узлов графа G, построить граф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ и систему вида (4), (5). Моделирование процесса построения множества $M \subseteq I$ обозреваемых узлов графа G и соответствующей системы (4), (5) завершается, когда ранг матрицы системы (4), (5) равен числу неизвестных. Итак, в случае 3) для множества M обозреваемых узлов графа G построен граф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ и соответствующая система (4) – (5) для определения численных значений дуговых потоков $x_{ij}, (i,j) \in \overline{U}$ и внешнего потока $x_i, i \in \overline{I}^*$. Граф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ — ненаблюдаемая часть графа $G = (I, U)$ — может быть несвязным. Некоторые компоненты связности графа $\overline{G}$ могут не содержать узлов из множества $\overline{I}^*$ с ненулевым внешним потоком. В этом случае базисный граф является остовным деревом. Для других компонент связности выполняется условие $\overline{I}^* \neq \emptyset$ и базисный граф — лес деревьев, свойства которого описаны в [4].

Теорема 1. *Субоптимальное решение. Пусть для связного двунаправленного орграфа G с функцией потока* (1), *содержащего $k = |I^*|$, $k \neq 0$ узлов с внешним потоком $x_i \neq 0, i \in I^*$ известны коэффициенты $p_{ij} \in (0,1]$, $(i,j) \in U$ разбиения суммарного потока $\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}$, исходящего из каждого узла $i \in I$. Тогда для определения численных значений дуговых потоков графа G достаточно разместить $k = |I^*|$ сенсоров в узлах множества I^*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 приведено в [4].

По теореме 1 верхняя граница $\overline{h}$ интервала $[\underline{h}, \overline{h}]$, $\underline{h} = 1$, $\overline{h} = |I|$ изменения числа $|M|$ обозреваемых узлов графа $G = (I, U)$ субоптимального решения уменьшена до значения $\overline{h} = |I^*|$, $I^* \neq \emptyset$. Предложен новый подход к созданию численных методов декомпозиции базисных графов. В синтезе с современными инновационными технологиями разреженного матричного анализа, теории графов, теоретической информатики построены алгоритмические, структурные, технологические решения независимых подсистем с различными типами разреженности. Выполнены прикладные исследования задачи оценки множества M обозреваемых узлов сети G на реальных данных [4], анализ численной устойчивости решений разреженных систем линейных алгебраических уравнений с матрицами неполного и полного рангов.

Библиографические ссылки

1. *Gentili M., Mirchandani P.* Locating active sensors on traffic networks // Annals of Operation Research. 2006. Vol. 144. No. 1. P. 201–234.

2. *Bianco L., Confessore G., Gentili M.* Combinatorial Aspects of the Sensor Location Problem // Annals of Operation Research. 2006. Vol. 144. No. 1. P. 201–234.
3. *Bianco L., Confessore G., Reverberi P.* A network based model for traffic sensor location with implications on O/D matrix estimates // Transportation Science. 2001. Vol. 35. No. 1. P. 50–60.
4. *Пилипчук, Л.А., Пилипчук А.С., Полячок Е.Н., Фаразей А.И.* Идентификация сенсорной конфигурации и управление потоками // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018. № 2. С. 67–76.
5. *Pilipchuk L.A., Malakhouskaya Y.V., Kincaid D.R., Lai M.* Algorithms of Solving Large Sparse Underdetermined Linear Systems with Embedded Network Structure // East-West J. of Mathematics. 2002. Vol. 4. No. 2. P. 191–201.

О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Ю.Д. Селюцкий

НИИ механики МГУ, Москва, Россия
seliutski@imec.msu.ru

Введение. Различные механические системы, динамика которых определяется воздействием аэродинамических сил и сил упругости (так называемые аэроупругие системы), активно изучаются в течение многих десятилетий. Характерной особенностью поведения таких систем является возникновение в них автоколебаний при определенных условиях. Как правило (в задачах, связанных с динамикой летательных аппаратов или колебаний конструкций в потоке), этот эффект является нежелательным, поскольку он может привести к износу и разрушению объекта. Однако в последние годы активно изучается возможность использования подобных колебаний для преобразования энергии потока в полезные формы. Обзор иследований в этом направлении приведен, в частности, в [1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим аэродинамический маятник (крыло с симметричным профилем, установленное на державке), точка подвеса которого упруго закреплена таким образом, что она может двигаться вдоль неподвижной горизонтальной прямой OY (см. рис. 1). Ось маятника вертикальна. Система помещена в стационарный поток среды, скорость которого горизонтальна и перпендикулярна OY.

Для описания аэродинамического воздействия на маятник используется квазистатический подход [2].