

ЗАДАЧА ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ В КУРСЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЗАДАЧА О СИЛОВЫХ И ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЛИНИЯХ КАК ПРИЛОЖЕНИИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Радыно Н.Я.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
mir@bsu.by

В курсе дифференциальных уравнений формулируется задача о построении траекторий ортогональных данному однопараметрическому семейству линий. Эта задача была сформулирована в 1694 г. Иоганном Бернулли и решена им же в 1697 г.

Суть решения этой задачи, состоит в следующем [1]: сначала строят дифференциальное уравнение, решением которого было бы заданное семейство линий. Затем это дифференциальное уравнение преобразуют. А именно, в нем заменяют y' на $-1/y'$. Полученное, новое дифференциальное уравнение интегрируют, причем его решение представляет собой искомое семейство траекторий, ортогональных заданному семейству линий.

Кроме того, эта же идея И. Бернулли может быть применена для построения изогональных траекторий к данному однопараметрическому семейству линий.

С другой стороны, в курсе математического анализа в разделе «Функции комплексного переменного» излагают понятие дифференцируемости функции комплексного переменного. Формулируют условия Коши–Римана (Эйлера–Даламбера). Функция комплексного переменного – это тот аппарат, который дает два семейства ортогональных друг другу траекторий. Так, любая дифференцируемая функция комплексного аргумента может быть записана в виде: $F(z) = u(x, y) + v(x, y)i$. Причем для нее выполняются условия Коши – Римана (Эйлера – Даламбера), т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Оказывается, кривые заданные уравнением $u(x, y) = c_1$ будут ортогональны кривым заданным уравнением $v(x, y) = c_2$. Действительно, вектор, касательный к кривой $u(x, y) = c_1$ имеет вид $(\partial u/\partial x, \partial u/\partial y)$. Вектор, касательный к кривой $v(x, y) = c_2$ есть $(\frac{\partial v}{\partial y} \partial x, \partial v/\partial y)$. Условия Коши – Римана (Эйлера – Даламбера) обеспечивают перпендикулярность этих векторов. Действительно, вычислив скалярное произведение указанных векторов, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Пример. $F(z) = z = x + yi$. Линии $x = c_1$ (прямые) и им ортогональные прямые $y = c_2$ («лист в клеточку»).

Пример. $F(z) = z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Линии $x^2 - y^2 = c_1$ (гиперболы) и им ортогональные гиперболы $2xy = c_2$.

В качестве приложения функций комплексного переменного может быть приведена задача об описании силовых и эквипотенциальных линий электростатического поля. Впервые, понятие силовой линии ввел Майкл Фарадей в 1843 г. Задачи плоской электростатики, магнитостатики, а также задачи плоской гидро-аэродинамики решаются с использованием указанной выше идее построения двух ортогональных друг другу семейств линий [2]. Речь идет о силовых и эквипотенциальных линиях.

Изложение студентам дифференциальных уравнений и математического анализа с приложениями, в виде задач электростатики и гидро-аэродинамики позволяет слить материал в единое целое. Установление междисциплинарных связей помогает студентам, выработать общий взгляд на основы математики, и дает им возможность увидеть картину связи математики и естествознания.

Литература

1. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений*. М., 1950.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М., 1958.