ОБ ОДНОМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ

Булатов В.И., Голухов В.Г., Кастрица О.А.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
bulatov@bsu.by; V.Goloukhov@gmail.com; kastritsa@bsu.by

Целью данной работы является обоснование для любого $t \neq 0$ хорошо известного неравенства
$$e^t > 1 + t, \tag{1}$$
не использующее исследование функций на монотонность и выпуклость методами дифференциального исчисления.

Очевидно, что (1) справедлива для $\forall t \leqslant -1$. Рассмотрим вначале случай $t = r \in \in \mathbb{Q}$, где $r \in (-1, 0) \bigcup (0, +\infty)$.

Во-первых, если $r \in (-1, 0)$, $r \in \mathbb{Q}$, то $\exists m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $r = -m/(n+1)$, где $m < n + 1$. Учитывая далее неравенство $e < (1 + 1/n)^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, получим
$$e^r > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-m} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{m} = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant$$
$$\left[1 - \frac{1}{n+1} \geqslant 1 - \frac{1}{n-k+2} = \frac{n-k+1}{n-k+2} > 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m < n+1\right]$$
$$\geqslant \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{n-k+1}{n-k+2}\right) = \frac{n-m+1}{n+1} = 1 - \frac{m}{n+1} = 1 + r.$$

Во-вторых, если $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, то $\exists m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $r = m/n$. Поэтому в силу неравенства $e > (1 + 1/n)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, имеем
$$e^r > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m} = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant \left[1 + \frac{1}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{n+k-1} = \frac{n+k}{n+k-1} > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}\right] \geqslant$$
$$\geqslant \prod_{k=1}^{m} \frac{n+k}{n+k-1} = \frac{n+m}{n} = 1 + \frac{m}{n} = 1 + r.$$

Значит (1) выполняется для $\forall t = r \in \mathbb{Q}$, где $r \neq 0$. Далее, учитывая, что для $\forall t \in (-1,0)\bigcup(0,+\infty)$, $t \in \mathbb{R}$, следует

$$\frac{t}{2} - (\sqrt{1+t}-1) = \frac{(\sqrt{1+t}-1)^2}{2} > 0,$$

получаем, что в рассмативаемом случае всегда $\exists r \in \mathbb{Q}$ такое, что $r \in (\sqrt{1+t} - 1, t/2) \subset (-1,0)\bigcup(0,+\infty)$ и, поэтому, в силу выше доказанного, имеем

$$e^t > \left[\frac{t}{2} > r \Rightarrow t > 2r\right] > e^{2r} > \left[r > \sqrt{1+t}-1 \Rightarrow r+1 > \sqrt{1+t} > 0\right] >$$

$$> (1+r)^2 > (\sqrt{1+t})^2 = 1+t.$$

Таким образом, неравенство (1) выполняется не только для $\forall t \leqslant -1$, но и для $\forall t \in (-1,0)\bigcup(0,+\infty)$, т,е, для $\forall t \neq 0$.

Отметим, что доказанное для $\forall t \neq 0$ неравенство (1), переходящее в равенство при $t = 0$, можно назвать замечательным экспоненциальным неравенством в связи с тем, что оно является одним из определяющих свойств экспоненты в том смысле, что среди функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих для $\forall a, b \in \mathbb{R}$ равенству $f(a)f(b) = f(a+b)$, единственной функцией для которой выполнено неравенство $f(t) \geqslant 1+t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, является $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Проиллюстрируем на конкретных примерах использование неравенства (1) для обоснования классических замечательных пределов.

Пример 1. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Для $x \neq 0$, используя в (1) $t = x\ln a \neq 0$ и $t = -x\ln a \neq 0$, имеем

$$a^x > 1 + x\ln a, \quad a^{-x} > 1 - x\ln a.$$

Отсюда для $\forall x \in (-1/|\ln a|, 0)\bigcup(0, 1/|\ln a|)$ следует $0 < 1 + x\ln a < a^x < 1/(1 - x\ln a)$. Значит,

$$\left|\frac{a^x-1}{x} - \ln a\right| = \frac{|a^x - 1 - x\ln a|}{|x|} = \frac{a^x - 1 - x\ln a}{|x|} < \frac{\frac{1}{1-x\ln a} - (1+x\ln a)}{|x|} =$$

$$= \frac{x^2\ln a}{|x|(1-x\ln a)} = \frac{|x|\ln a}{1-x\ln a}. \tag{2}$$

Так как при $x \to 0$ правая часть полученного неравенства (2) стремится к нулю, то [1]

$$\left(\frac{a^x-1}{x} - \ln a\right)\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{т.е.} \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a.$$

Пример 2. Для $x \in (-1,0)\bigcup(0,+\infty)$ используя в (1) $t = \ln(1+x) \neq 0$ и $t = -\ln(1+x) \neq 0$, имеем

$$1 + x > 1 + \ln(1+x), \quad \frac{1}{1+x} > 1 - \ln(1+x).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x. \tag{3}$$

Значит,

$$\left|\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right|=\frac{|\ln(1+x)-x|}{|x|}=\frac{x-\ln(1+x)}{|x|}<\frac{x-\frac{x}{1+x}}{|x|}=\frac{x^2}{|x|(1+x)}=\frac{|x|}{1+x}. \quad (4)$$

Откуда получаем [1] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1.$

Пример 3. Для $x\in(-1,0)\bigcup(0,+\infty)$ из (4) следует

$$1-\frac{|x|}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1+\frac{|x|}{1+x},$$

т.е.

$$\exp\left(1-\frac{|x|}{1+x}\right)<(1+x)^{1/x}<\exp\left(1+\frac{|x|}{1+x}\right). \quad (5)$$

Так как левая и правая части неравенства (5) при $x\to 0$ стремятся к e, то [1]

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Пример 4. Покажем, что для $\forall x>-1$ и $\forall\alpha\geqslant 1$ справедлив функциональный аналог неравенства Бернулли

$$(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x. \quad (6)$$

Так, как при $t=0$ неравенство (1) переходит в равенство, то для $t=(\alpha-1)\ln(1+x)$, где $x>-1$, $\alpha\geqslant 1$, имеем $(1+x)^\alpha=(1+x)e^{(\alpha-1)\ln(1+x)}\geqslant(1+x)(1+(\alpha-1)\ln(1+x))$.

Отсюда в силу левой части неравенства (3) получаем

$$(1+x)^\alpha\geqslant(1+x)\left(1+\frac{(\alpha-1)x}{1+x}\right)=1+\alpha x.$$

Доказанное для $x>-1$ и $\alpha\geqslant 1$ неравенство (6), заменой в нем $x>-1$ на

$$\left(-\frac{x}{1+x}\right)=\left(-1+\frac{1}{x+1}\right)>-1,$$

приводит к неравенству $\dfrac{1}{(1+x)^\alpha}\geqslant\dfrac{1-(\alpha-1)x}{1+x}$, откуда для $x\in(-1,1/(\alpha-1))$ где $\alpha>1$, следует $(1+x)^\alpha\leqslant\dfrac{1+x}{1-(\alpha-1)x}$ и, значит, для $\forall x>-1$ и $\alpha>1$ имеем $1+\alpha x\leqslant(1+x)^\alpha\leqslant\dfrac{1+x}{1-(\alpha-1)x}$.

Отсюда для $x\in(-1,0)\bigcup(0,1/(\alpha-1))$, где $\alpha>1$, получаем

$$\left|\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}-\alpha\right|=\frac{|(1+x)^\alpha-1-\alpha x|}{|x|}=\frac{(1+x)^\alpha-(1+\alpha x)}{|x|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\frac{1+x}{1-(\alpha-1)x}-(1+\alpha x)}{|x|}=\frac{\alpha(\alpha-1)|x|}{(1-(\alpha-1)x)}.$$

Так, как правая часть этого неравенства при $x\to 0$ стремится к нулю, то для $\forall\alpha>1$ следует [1]

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$$

Остальные случаи $\alpha\in\mathbb{R}$ рассматриваются по той же схеме, что и в [2].

Литература

1. Богданов Ю.С., Кастрица О.А.,Сыроид Ю.Б. *Математический анализ. Учебное пособие для вузов.* М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2003.

2. Булатов В.И., Голухов В.Г., Кастрица О.А. *Монотонные последовательности. Число Непера*: учеб. материалы для студентов ФПМИ. Мн.: БГУ, 2019.