Теорема. *Если функция* $f(t)$ *локально интегрируема на промежутке* $[0,\infty)$ *и имеет асимптотическое разложение вида* (2), *то*

$$S_l[f](x)=\frac{a_0\ln^2 x}{x}+\frac{A_0\ln x}{x}+\frac{\pi^2}{6}\frac{a_0}{x}+O\biggl(\frac{\ln^2 x}{x^2}\biggr),\quad x\to\infty. \tag{3}$$

где

$$A_0=\int\limits_0^1 f(t)\,dt+\int\limits_1^\infty\biggl(f(t)-\frac{a_0}{t}\biggr)\,dt.$$

Основные моменты доказательства теоремы. Очевидно, что

$$S_l[f](x)=\frac{\ln x}{x}\int\limits_0^\infty\frac{f(t)}{1+t/x}\,dt+\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty\frac{\ln(1+t/x)}{1+t/x}f(t)\,dt=I_1(x)+I_2(x). \tag{4}$$

Для $I_1(x)$ можно в [1] найти разложение

$$I_1(x)\sim\ln^2 x\biggl(\sum_{s=0}^\infty(-1)^s a_s x^{-s-1}\biggr)+\ln x\biggl(\sum_{s=0}^\infty(-1)^s A_s x^{-s-1}\biggr),$$

где

$$A_s=\int\limits_0^1 t^s\left(f(t)-\sum_{k=0}^{s-1}\frac{a_k}{t^{k+1}}\right)\,dt+\int\limits_1^\infty t^s\left(f(t)-\sum_{k=0}^{s}\frac{a_k}{t^{k+1}}\right)\,dt. \tag{5}$$

Второе слагаемое $I_2(x)$ в формуле (4) исследуется с помощью метода последовательных разложений (см. [2]). Тогда

$$I_2(x)\sim\ln x\biggl(\sum_{s=0}^\infty(-1)^{s+1}\left(\psi(s+1)-\psi(1)\right)a_s x^{-s-1}\biggr)+\sum_{s=0}^\infty B_s x^{-s-1},$$

где $B_s=(-1)^{s+1}\left(\psi(s+1)-\psi(1)\right)A_s+(-1)^s\psi'(s+1)a_s$. Здесь A_s задается формулой (5). Это основные моменты доказательства теоремы. Если уточнить некоторые оценки, то можно получить асимптотическое разложение вида

$$S_l[f](x)\sim\sum_{k=0}^\infty\left(C_s\ln^2 x+D_s\ln x+B_s\right)x^{-s-1},\quad x\to\infty.$$

Литература

1. Wong R. *Asymptotic Approximations of Integrals.* New York, SIAM, 2001.

2. Риекстыньш Э.Я. *Асимптотические разложения интегралов.* Т. 1. Рига: Зинатне, 1974.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Леваков А.А., Васьковский М.М.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь levakov@tut.by; vaskovskii@bsu.by

Пусть K, Y – банаховы пространства, $\mathcal{P}(Y)$ – семейство всех непустых подмножеств пространства Y. Отображение $\Gamma : K\to\mathcal{P}(Y)$ называется *сильно-слабо полунепрерывным сверху*, если для каждой точки $x\in K$ и для каждой $\sigma(Y,Y^*)$-окрестности

V множества $\Gamma(x)$ существует $\sigma(K)$-окрестность U точки x такая, что $\Gamma(x) \subset V$ для всех $x \in U$ (здесь $\sigma(Y, Y^*)$ – слабая топология на Y, $\sigma(K)$ – сильная топология на K).

Предложение. *Пусть $s : K \to Y$ – локально ограниченное отображение; K, Y – сепарабельные гильбертовы пространства; $S(x) = \bigcap_{\substack{\varepsilon>0\\ \delta>0}} \overline{\mathrm{co}}\,[s([x]_\varepsilon)]_\delta$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

1) многозначное отображение $S : K \to \mathcal{P}_{cc}(Y)$ локально ограничено и сильно-слабо полунепрерывно сверху;

2) $S(x) = \overline{\mathrm{co}}\,\{z :$ существует последовательность $(x_n) \subset K$, сходящаяся к x, такая, что последовательность $s(x_n)$ слабо сходится к $z\}$, здесь $\mathcal{P}_{cc}(Y)$ – семейство всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств пространства Y, $[X]_\varepsilon$ – ε-окрестность множества X, $\overline{\mathrm{co}}\,(X)$ – замкнутая выпуклая оболочка множества X.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t) = AX(t)\,dt + f(X(t))\,dt + g(X(t))\,dW(t), t \in [0, a], \tag{1}$$

где A – генератор компактной C_0-полугруппы $S(t)$ на сепарабельном гильбертовом пространстве H; $W(t)$ – винеровский процесс со значениями в H и ковариационным оператором Q (оператор Q симметрический и положительно определенный); $f : H \to H$, $g : H \to L_2^0(H)$ – измеримые по Борелю и локально ограниченные отображения, $L_2^0(H)$ – пространство операторов Гильберта–Шмидта $B : H_0 \to H$ с нормой

$$\|B\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Bu_i\|^2\right)^{1/2},$$

где u_i – полный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $H_0 = Q^{1/2}H$, состоящем из элементов пространства H, скалярное произведение в котором задается следующим образом:

$$\langle u, v\rangle = \langle Q^{-1/2}u, Q^{-1/2}v\rangle.$$

Обозначим $a(X) = (g(X)Q^{1/2})(g(X)Q^{1/2})^*$. В каждой точке $X \in H$ построим множества

$$\Gamma(X) = \bigcap_{\substack{\varepsilon>0\\ \delta>0}} \overline{\mathrm{co}}\,[a([X]_\varepsilon)]_\delta, \quad F(X) = \bigcap_{\substack{\varepsilon>0\\ \delta>0}} \overline{\mathrm{co}}\,[f([X]_\varepsilon)]_\delta.$$

Согласно предложению (1) многозначные отображения F, Γ локально ограничены и сильно-слабо полунепрерывны сверху, кроме того, $F(X)) = \overline{\mathrm{co}}\,\{z :$ существует последовательность $(X_n) \in H$, сходящаяся к X такая, что последовательность $f(X_n)$ слабо сходится к $z\}$, $\Gamma(X)) = \overline{\mathrm{co}}\,\{z :$ существует последовательность $(X_n) \in H$, сходящаяся к X, такая, что последовательность $a(X_n)$ слабо сходится к $z\}$.

Определение. Под β-мартингальным решением уравнения (1) будем понимать непрерывный H-значный процесс $X(t)$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, такой, что выполняются следующие условия:

1) процесс $X(t)$ является $(\mathcal{F}_t)$-согласованным и имеет непрерывные траектории до момента τ, где τ – $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки со значениями в $[0, a]$, кроме того, $\limsup\limits_{t\to\tau-0} \|X(t)\| = \infty$ при $\tau < a$;

2) существует H-значный винеровский процесс $W(t)$ с ковариационным оператором Q;

3) существуют прогрессивно измеримые процессы $v(t)$, $u(t)$ со значениями в H, $L_2^0(H)$ соответственно и такие, что для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in [0,a] \times \Omega$ выполняются включения

$$1_{[0,\tau)}(t)v(t) \in 1_{[0,\tau)}(t)F(X(t)), \quad 1_{[0,\tau)}(t)(u(t)Q^{1/2})(u(t)Q^{1/2})^* \in 1_{[0,\tau)}(t)\Gamma(X(t)),$$

и если $\tau_n(\omega) = \inf\{t : \|X(t,\omega)\| \geqslant n\}$, то для каждого $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\int_0^{\tau_n} (\|v(s)\| + \|(u(s)Q^{1/2})(u(s)Q^{1/2})^*\|)\, ds < \infty \quad \text{п.н.};$$

4) с вероятностью 1 для всех $t < \tau$ выполняется равенство

$$X(t) = S(t)X(0) + \int_0^t S(t-s)v(s)\, ds + \int_0^t S(t-s)u(s)\, dW(s).$$

Теорема. *Пусть отображения $f(X)$ и $g(X)$ измеримы по Борелю и локально ограничены, при каждом $t \in (0,a]$ оператор $S(t)$ компактен. Тогда для любой заданной вероятностной меры λ на $(H, \beta(H))$ с компактным носителем уравнение* (1) *имеет β-мартингальное решение с начальным распределением λ.*

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОБРАТНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОЙ КРАТНОСТИ

Трифонова И.В.

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь
irinat@grsu.by

Основные результаты исследования теории нелинейных эволюционных операторов второй кратности, качестве ядер которых выступают векторные обобщенные функции, представлены в [1]. В статье [2] изложены теоремы для построения компонент системного асимптотически обратного оператора определенной степени к системному эволюционному оператору. В публикации представлен операторный подход для систем двух нелинейных дифференциальных или интегрально-дифференциальных уравнений, заключающийся в построении компонент асимптотически обратного эволюционного оператора второй кратности, где асимптотика приближения определяется количеством его начальных компонент нелинейных динамических систем, характеризуемых системами интегрально-дифференциальных уравнений. В частности, в статье [3] построено асимптотическое приближение для системы вида (1) и (2)

$$\int_0^t \int_0^t K_{11}(t-s_1, t-s_2)x_1(s_1)x_1(s_2)\, ds_1\, ds_2 + \int_0^t K_1(t-s_1)x_1(s_1)\, ds_1 +$$