КОНЕЧНОСТЬ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА, УПРАВЛЯЕМЫХ СТАНДАРТНЫМИ И ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

Васьковский М.М.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
vaskovskii@bsu.by

На заданном полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ рассмотрим многомерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = b(X_t)\,dt + h(X_t)\,dW_t + \sigma(X_t)\,dB_t^H, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times k}$ – детерминированные функции, W_t и B_t^H – независимые m-мерное стандартное $\mathcal{F}_t$-согласованное броуновское движение и k-мерное $\mathcal{F}_t$-согласованное дробное броуновское движение с показателем Херста $H \in (1/2, 1)$.

Определение 1. Сильным решением уравнения (1) называется $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс X_t такой, что для почти всех $\omega \in \Omega$ для любых $t \in [0,T]$ выполняется равенство $X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t h(X_s)\,dW_s + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s^H$, где интеграл по W_t –

интеграл Ито, а интеграл по B^H – потраекторный интеграл Римана–Стилтьеса. Сильное решение X_t уравнения (1) с начальным условием $X_0 = \xi$, где ξ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина, называется единственным, если для любого сильного решения Y_t уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется условие $P(X_t = Y_t \ \forall t \in [0,T]) = 1$.

Пусть $d = 1 + m + k$, определим d-мерный случайный процесс $B_t = (t, W_t, B_t^H)$. Обозначим через H_i показатели Херста его компонент $B_t^{(i)}$, т.е. $H_1 = 1$, $H_2 = \ldots \ldots = H_{m+1} = 1/2$, $H_{m+2} = \ldots = H_d = H$. Зафиксируем произвольное $\alpha \in (1/3, 1/2)$.

Для прозвольного случайного процесса Y_t, $t \in [0,T]$, через $Y_{s,t}$ будем обозначать приращение процесса Y, т.е. $Y_{s,t} = Y_t - Y_s$.

Определим кусочно-линейные аппроксимации процесса B_t соотношением

$$B_{m,t} = B_{t^m_{l-1}} + (t - t^m_{l-1}) B_{t^m_{l-1}, t^m_l}, \quad t \in [t^m_{l-1}, t^m_l), \quad l = 1, \ldots, 2^m, \quad t^m_l = Tl/2^m.$$

Построим процесс второго порядка $\mathbb{B} : [0,T]^2 \times \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ следующим образом: если $i \neq j$ или $H_i \neq 1/2$, то полагаем

$$\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t} = \lim_{m\to\infty} \int\limits_s^t \int\limits_s^\tau dB^{(i)}_{m,r}\, dB^{(j)}_{m,\tau}, \tag{2}$$

если $H_i = 1/2$, то положим

$$\mathbb{B}^{(i,i)}_{s,t} = \int\limits_s^t \int\limits_s^\tau dB^{(i)}_r\, dB^{(i)}_\tau, \tag{3}$$

где интегралы в правой части соотношения (2) понимаются как потраекторные интегралы Римана–Стилтьеса, а интегралы в правой части соотношения (3) – как интегралы Ито.

Траектории процесса $\mathbf{B}_t = (B_t, \mathbb{B}_{0,t})$ п.н. принадлежат множеству α-непрерывных по Гельдеру грубых траекторий $\mathscr{C}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^d)$.

Пусть V – некоторое евклидово пространство. Будем говорить, что процесс Y_t, траектории которого п.н. принадлежат $C^\alpha([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, V))$ – множеству α-непрерывных по Гельдеру отображений, управляется процессом B_t, если существует процесс Y'_t (производная Губинелли от Y_t), траектории которого п.н. принадлежат множеству $C^\alpha([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, V)))$, и такой что остаточный член $R^Y_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_s B_{s,t}$ удовлетворяет условию п.н.

$$|R^Y|_{2\alpha} := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|R^Y_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty.$$

Для процессов Y_t, управляемых процессом B_t, определим полунорму его траекторий $\mathcal{N}(Y)$ следующим образом:

$$\mathcal{N}(Y) = \sup_{t\in[0,T]} |Y'_t| + \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|Y_{s,t}| + |Y'_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} + |R^Y|_{2\alpha},$$

и определим гельдеровскую норму для траекторий процесса Y_t соотношением

$$\|Y\|_\alpha = \sup_{t\in[0,T]} |Y_t| + \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\ s\neq t}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}.$$

Пусть процесс Y_t управляется процессом B_t. Потраекторным интегралом Губинелли от Y по грубой траектории $\mathbf{B}$ называется следующий предел интегральных сумм (в предположении, что этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[0,T]$ точками t_i)

$$\int_0^T Y_r\,d\mathbf{B}_r := \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\mathcal{P}} (Y_{t_i} B_{t_i,t_{i+1}} + Y'_{t_i}\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}),$$

где $|\mathcal{P}| = \max_i (t_{i+1} - t_i)$ – диаметр разбиения $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots t_l = T\}$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующее уравнение в грубых траекториях

$$dX_t = f(X_t)\,d\mathbf{B}_t, t \in [0,T], \tag{4}$$

где $f = \mathrm{col}(b,h,\sigma)$.

Определение 2. Решением уравнения (4) будем называть случайный процесс X_t, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$, такой, что п.н. выполняются условия: 1) $X \in C^\alpha([0,T],\mathbb{R}^n)$; 2) процессы X_t, $f(X_t)$ управляются процессом B_t; 3) для любого $t \in [0,T]$ имеет место равенство $X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)\,d\mathbf{B}_s$, где интеграл в правой части – потраекторный интеграл Губинелли, при этом $X'_t = f(X_t)$, $(f(X_t))' = Df(X_t)f(X_t)$. Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. Решение X_t уравнения (4) с начальным условием $X_0 = \xi$ называется *единственным*, если для любого решения Y_t уравнения (4) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется равенство $P(X_t = Y_t \forall t \in [0,T]) = 1$. Решение X_t уравнения (4) будем называть *сильным*, если процесс X_t является $\mathcal{F}_t$-согласованным.

Обозначим через $C_b^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times d})$ множество функций $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ непрерывных и ограниченных вместе со своими частными производными до порядка k включительно.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C_b^4(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times d})$, $p \geqslant 1$. *Тогда для любой* $\mathcal{F}_0$*-измеримой случайной величины* ξ *существует единственное сильное решение* X_t *уравнения* (4) *с начальным условием* $X_0 = \xi$. *Кроме того, если* $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$, *то* $\mathbb{E}(\|X\|_\alpha^p) < \infty$.

Теорема 2. *Пусть функции* b, h, σ *непрерывны и ограничены вместе со своими частными производными до четвертого порядка включительно. Тогда для любой* $\mathcal{F}_0$*-измеримой случайной величины* ξ *такой, что* $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$, $p \geqslant 1$, *существует единственное сильное решение* X_t *уравнения (1) с начальным условием* $X_0 = \xi$, *и для любого* $\alpha \in (1/3, 1/2)$ *выполняется неравенство* $\mathbb{E}(\|X\|_\alpha^p) < \infty$.