3. По способу вывода (из постановки смешанной задачи) условия согласования (4)–(6) при $q \leqslant m$ оказываются необходимыми для корректности по Адамару характеристической смешанной задачи (1)–(3) во множестве решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$. Работы [1, 2] свидетельствуют о том, что для ее корректности по Адамару в пространстве решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ не хватает соответствующего условия согласования типа (6) при $q = m+1$, которое содержит производную по вектору $\vec{\nu}_2 = \{a_2, 1\}$ для нечетных m и критериальное значение суммы частных производных от f по x и t порядка $m-1$ для четных m в начале координат $(0,0)$.

Литература

1. Ломовцев Ф.Е., Устилко Е.В. *Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии* // Весн. Віцебск. дзярж. ўн-та. 2018. № 4 (101). С. 18–28.

2. Ломовцев Ф.Е., Устилко Е.В. *Смешанная задача для одномерного волнового уравнения при характеристической первой косой производной в нестационарном граничном режиме для гладких решений* // Весн. Магілеўск. дзярж. ўн-та імя А.А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі. 2020. № 2 (56). С. 21–37.

3. Ломовцев Ф.Е., Устилко Е.В. *Условия согласования значений характеристической косой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 1. С. 30–37.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Чеб Е.С., Борисевич Д.В.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
cheb@bsu.by; dashbor00@gmail.com

Рассматривается построение классического решения смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка, оператор которого представляет собой четырехкратную композицию одного и того же оператора первого порядка, с постоянными коэффициентами и четырехкратной характеристикой, и получение достаточных условий гладкости и согласований граничных условий с начальными условиями и уравнением. Доказана теорема существования единственного классического решения этой смешанной задачи.

В области $Q = (0,\infty) \times (0,l) \subset \mathbb{R}^2$, переменных (t,x) рассмотрим относительно функции $u(t,x)$ линейное нестрого гиперболическое неоднородное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами в предположении, что гиперболический оператор уравнения L представим в виде композиции операторов первого порядка

$$Lu \equiv \prod_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x} \right) u(t,x) = f(t,x), \quad a > 0, \quad (t,x) \in Q. \tag{1}$$

К уравнению (1) присоединим начальные условия

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad x \in (0,l), \quad j = 0,1,2,3, \tag{2}$$

и граничные условия

$$u(t,0)=\mu_1(t),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\mu_2(t),\quad t\in(l/a,+\infty)\,, \tag{3}$$

$$u(t,l)=\nu_1(t),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\nu_2(t),\quad t\in(0,+\infty). \tag{4}$$

Условия (3), (4) выбираются таким образом, чтобы смешанная задача (1)–(4) была корректно поставленной по Адамару. Требуется построить классическое решение $u\in C^{(4)}(\overline{Q})$, $\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$, уравнения (1), удовлетворяющее уравнению (1) на Q в обычном смысле, а начальным (2) и граничным условиям (3), (4) в смысле пределов значения решения $u(t,x)$ во внутренних точках $(t,x)\in Q$. Найти достаточные требования гладкости исходных данных φ_j $(j=\overline{0,3})$, μ_1,μ_2,ν_1,ν_2 и условия согласования между ними и уравнением для корректной разрешимости поставленной задачи (1)–(4).

Уравнение (1) имеет одно семейство характеристик $x+at=C$, $C\in\mathbb{R}$, кратности четыре. Область Q разбивается характеристикой $x+at=l$ на две подобласти

$$Q^{(0)}=\left\{(t,x):0<t<\frac{l-x}{a},\ \ 0<x<l\right\},\quad Q^{(1)}=\left\{(t,x):t>\frac{l-x}{a},\ \ 0<x<l\right\},$$

$\overline{Q}=\overline{Q^{(0)}}\bigcup\overline{Q^{(1)}}$.

Из определения классического решения $u\in C^{(4)}(\overline{Q})$ задачи (1)–(4) вытекают основные обязательные требования гладкости начальных и граничных данных

$$\varphi_0\in C^{(4)}(\overline{\Omega}),\quad \varphi_1\in C^{(3)}(\overline{\Omega}),\quad \varphi_2\in C^{(2)}(\overline{\Omega}),\quad \varphi_3\in C^{(1)}(\overline{\Omega}),\quad f\in C(\overline{Q^{(0)}}),$$

$$\mu_1\in C^{(4)}\left[l/a,\infty\right),\quad \mu_2\in C^{(3)}\left[l/a,\infty\right),\quad \nu_1\in C^{(4)}[0,\infty),\quad \nu_2\in C^{(3)}[0,\infty). \tag{5}$$

Вычисляя соответствующие производные по t от граничных условий (4) при $t=0$, по x из начальных условий (2) при $x=0$, получаем простейшие условия согласования граничных условий (4) с начальными условиями (2) и уравнением (1):

$$\left.\frac{d^s\nu_1(t)}{dt^s}\right|_{t=0}=\varphi_s(l),\quad \left.\frac{d^s\nu_2(t)}{dt^s}\right|_{t=0}=\varphi'_s(l),\quad s=0,1,2,3, \tag{6}$$

$$\nu_1^{(4)}(0)=4a\varphi_3'(l)-6a^2\varphi_2''(l)+4a^3\varphi_1^{(3)}(l)-a^4\varphi_0^{(4)}(l)+f(0,0). \tag{7}$$

Условие согласования (7) вытекает из уравнения (1), начальных условий (2) и первого граничного условия из (4). Остальные достаточные условия согласования получаются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Пусть выполнены требования гладкости начальных и граничных данных* $\varphi_0\in C^{(7)}(\overline{\Omega})$, $\varphi_1\in C^{(6)}(\overline{\Omega})$, $\varphi_2\in C^{(5)}(\overline{\Omega})$, $\varphi_3\in C^{(4)}(\overline{\Omega})$, $\mu_1\in C^{(5)}\left[l/a,\infty\right)$, $\nu_1\in C^{(5)}[0,\infty)$, $\mu_2\in C^{(4)}\left[l/a,\infty\right)$, $\nu_2\in C^{(4)}[0,\infty)$, $f\in C(\overline{Q})$, *и выполнены основные условия согласования* (6), (7) *и дополнительные условия согласования. Тогда в классе функций* $C^{(4)}(\overline{Q})$ *смешанная задача* (1)–(4) *имеет единственное классическое решение.*

Доказательство теоремы проводится по схеме построения классического решения методом характеристик [1–2]. Общее решение уравнения (1) на Q из класса $C^{(4)}(Q)$ представляется в виде суммы

$$u(t,x) = g_1(x+at) + tg_2(x+at) + t^2 g_3(x+at) + t^3 g_4(x+at) +$$
$$+ \frac{1}{6}\int\limits_0^t (t-\tau)^3 f(\tau, f(\tau, x + a(t-\tau)) \tag{8}$$

четырех произвольных функций $g_1, g_2, g_3, g_4 \in C^{(4)}(\mathbb{R})$ от аргумента $x+at$, где функции $g_i : [0,\infty) \ni y \to g_i(y) \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3,4$. Классическое решение задачи (1)–(4) в области $Q^{(0)}$ совпадает с классическим решением задачи Коши (1), (2) в $Q^{(0)}$. В этой области неизвестные функции g_i определяются из условий (2) единственным образом в процессе решения системы дифференциальных уравнений. Из вида решения задачи Коши вытекают достаточные требования на гладкость начальных функций

$$\varphi_0 \in C^{(7)}(\overline{\Omega}), \quad \varphi_1 \in C^{(6)}(\overline{\Omega}), \quad \varphi_2 \in C^{(5)}(\overline{\Omega}), \quad \varphi_3 \in C^{(4)}(\overline{\Omega}). \tag{9}$$

Условия (9) отличаются от условий (5). Повышение требований гладкости обусловлено тем, что уравнение (1) является нестрого гиперболическим.

В области $Q^{(1)}$ для определения g_i также решается своя система дифференциальных уравнений. При ее получении использованы условия (3), (4).

На характеристике $x+at = l$, разделяющей области $Q^{(0)}$ и $Q^{(1)}$, требуется непрерывность решений и непрерывность производных решений до четвертого порядка включительно. Из этих условий получаются дополнительные условия согласования. В случае, когда $f(t,x) = 0$, они приведены в работе [3].

Литература

1. Корзюк В.И. *Уравнения математической физики.* Мн.: БГУ, 2010.

2. Чеб Е.С. *Классическое решение смешанной задачи для линейного гиперболического уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками* // Вестн. Гомельск. гос. ун-та. Сер. 2. 2017. Т. 7. № 3. С. 33–41.

3. Чеб Е.С., Симинская Е.С. *О классическом решении смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой* // Прикл. математика & Физика. 2020. Т. 1. № 1. С. 11–18.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ *F*-МОНОГЕННЫХ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ

Шилинец В.А.

Международный университет «МИТСО», Минск, Беларусь
v.shilinets@gmail.com

При изучении дифференциальных уравнений в частных производных используются разные методы. Одним из таких методов является метод функций, моногенных в смысле В.С. Федорова (F-моногенных) [1–7]. В частности, с помощью F-моногенных функций удается построить функционально-инвариантные решения системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте [8, 9]. Кроме того, с помощью указанных функций удается для некоторых видов дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений строить решения в замкнутой форме.