Литература

1. Корзюк В.И., Чеб Е.С. *Задача Гурса для уравнения четвертого порядка с биволновым оператором* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1435–1440.
2. Корзюк В.И. *Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.* Мн.: БГУ, 2013.
3. Корзюк В.И. *Уравнения математической физики.* М.: Ленанд, 2021.

ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ

Корзюк В.И.[1,2], Козловская И.С.[2]

[1] Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
Korzyuk@mail.com
[2] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
kozlovskaja@bsu.by

В работе в аналитическом виде представлено классическое решение в классе непрерывно дифференцируемых функций произвольного порядка со смешанными граничными условиями в четверти плоскости для волнового уравнения. Граница области состоит из двух перпендикулярных полупрямых. На одной из них задаются условия Коши. Вторая полупрямая разделена на две части: конечный отрезок и оставшаяся часть в виде полупрямой. На отрезке задается условие Дирихле, на второй части в виде полупрямой – условие Неймана. В четверти плоскости определяется классическое решение рассматриваемой задачи. Для построения этого решения записывается частное решение исходного волнового уравнения. Для заданных функций задачи записываются условия согласования, которые являются необходимыми и достаточными, чтобы решение задачи было классическим высокого порядка гладкости и единственным.

Постановка задачи. Относительно независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается линейное одномерное волновое уравнение

$$Lu = (\partial_{x_0}^2 - a^2\partial_{x_1}^2)u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \bar{Q} = [0,\infty) \times [0,\infty), \tag{1}$$

относительно искомой функции $u : \overline{Q} \ni \mathbf{x} \to u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, где ∂_{x_0}, ∂_{x_1} – операторы частных производных первого порядка по переменным x_0 и x_1 соответственно, $\partial_{x_0}^2 = \partial_{x_0}\partial_{x_0}$, $\partial_{x_1}^2 = \partial_{x_1}\partial_{x_1}$, a^2 – положительное число из $\mathbb{R}$. Для уравнения (1) в четверти плоскости R^2 определяется классическое решение из класса $C^k(\bar{Q})$, $k \geqslant 2$, k – целое положительное число.

Область $Q = [0,\infty) \times [0,\infty)$ разделим на две подобласти

$$Q^{(j)} = \{\boldsymbol{x} : (-1)^j(ax_0 - x_1) > 0\}, \quad j = 1, 2,$$

независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1)$. В $Q^{(j)}$ рассматриваем уравнение (1). На части границы ∂Q области Q к уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0}u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0,\infty), \tag{2}$$

а на оставшейся части границы ∂Q – граничные условия

$$u(x_0, 0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \tau), \tag{3}$$

$$\partial_{x_1} u(x_0, 0) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [\tau, \infty), \tag{4}$$

где $\tau \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Таким образом имеем смешанную задачу (1)–(4) для уравнения (1).

Задача. Определить в аналитическом виде классическое решение уравнения (1) из класса $C^k(\bar{Q})$ непрерывно дифференцируемых функций до порядка $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $\bar{Q}$ – замыкание области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

Как известно [3], общее решение u уравнения (1) принадлежит классу $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда оно представимо в виде суммы

$$u(\boldsymbol{x}) = u^{(0)}(\boldsymbol{x}) + v_p(\boldsymbol{x}), \tag{5}$$

где $u^{(0)}$ – общее решение из класса $C^k(\bar{Q})$ однородного уравнения

$$Lu^{(0)}((\boldsymbol{x}) = 0, \tag{6}$$

а $v_p \in C^k(\bar{Q})$ – частное решение уравнения (1).

Согласно [3] общее решение $u^{(0)}(\boldsymbol{x})$ из $C^k(\bar{Q})$ однородного уравнения (1) тогда и только тогда, когда оно представимо в виде [1]

$$u^{(0)}(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0), \tag{7}$$

где $g^{(j)}$ – произвольные функции из класса $C^k(D(g^{(j)}))$, $j = 1, 2$, $(D(g^{(j)}))$ – области определения функций $g^{(j)}$ для любых $\boldsymbol{x} \in \bar{Q}$, $D(g^{(1)}) = \mathbb{R}$, $D(g^{(2)}) = [0, \infty)$.

Решение задачи (1)–(4) находим согласно представлениям (5), (7). Частное решение уравнения (1) из класса $C^k(D(g^{(j)}))$ в явном виде построено в работах [1, 2]. В данной работе воспользуемся этим частным решением v_p.

Теорема. *Пусть выполнены включения*

$$\varphi \in C^k([0, \infty)), \quad \psi \in C^{(k-1)}([0, \infty)), \quad f \in C^{(k-1)}(\bar{Q}),$$
$$\mu^{(1)} \in C^k([0, \infty)), \quad \mu^{(2)} \in C^{(k-1)}([0, \infty)).$$

Существует единственное классическое решение задачи (1)–(4) *из класса* $C^k(\bar{Q})$, *представимое в аналитическом виде, тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$d^s \mu^{(1)}(0) - a^{s-1}\, d^{(s-1)}\psi(0) = d^s_{x_0} v_p(0, 0) - a^{s-1}\partial_{x_0}\partial^{(p-1)} v_p(0, 0), \quad s = 3, 5 \ldots, \quad s \leqslant k.$$

$$d^s \mu^{(1)}(\tau) - a\, d^{s-1}\mu^{(2)}(\tau) - a^s\, d^s\varphi(a\tau) - a^{s-1}\, d^{s-1}\psi(a\tau) =$$
$$= a\partial^{s-1}_{x_0}\partial_{x_1} v_p(\tau, 0) - a^{s-1}\partial_{x_0}\partial^{s-1}_{x_1} v_p(0, a\tau), \quad s = 1, 2, \ldots, k.$$

где k *– любое целое число и* $k \geqslant 2$.

Литература

1. Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю. *Классическое решение в четверти плоскости смешанной задачи для волнового уравнения со смешанными условиями* // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62. № 6. С. 637–645.

1. Корзюк В. И. *Уравнения математической физики.* М.: ЛЕНАНД, 2021. – 480с.

3. Корзюк В. И., Козловская И. С., Соколович В. Ю. *Решение волнового уравнения в четверти плоскости* // Тр. Ин-т математики НАН Беларуси. 2020. Т. 28. № 1-2. С. 35–50.