$$m_1 = y_f f_z - z_f f_y, \quad m_2 = z_f f_x - x_f f_z, \quad m_3 = x_f f_y - y_f f_x, \\ i = 1, 2, 3, \quad 1 \equiv x, \quad 2 \equiv y, \quad 3 \equiv z,$$

где x_f , y_f и z_f – координаты точки приложения нагрузки. Коэффициенты a_{ij} зависят от геометрической формы корня зуба, коэффициента Пуассона, а также от релаксационного модуля упругости тканей периодонтальной связки.

Оценка параметров ядра релаксации выполнена на основании данных эксперимента по определению зависимостей перемещений корня зуба в периодонтальной связке под действием сосредоточенной нагрузки [4]. Установлено, что одновременное изменение параметра $\nu_\sigma = (E_\infty - E_0)/E_0$ и параметра дробности γ при практически одинаковых максимальных значениях перемещений корня зуба в периодонтальной связке позволяет задавать различные промежутки времени для фазового перехода периодонтальной связки и максимальное значение перемещения корня зуба в периодонтальной связке для любой нагрузки. Величина максимального перемещения и угла поворота при различных значениях нагрузки может быть задана посредством изменения величины параметра ν_σ . Увеличение параметра дробности приводит к увеличению длительности фазового перехода и величины максимального перемещения корня зуба (при постоянных значениях параметров ν_σ и времени ретардации τ_σ).

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф20Р-083).

Литература

1. Bosiakov S.M. *On the application of a viscoelastic model with Rabotnov's fractional exponential function for assessment of the stress-strain state of the periodontal ligament* // Int. J. Mech. 2014. V. 8. P. 347–352.
2. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. *Centennial jubilee of academician Rabotnov and contemporary handling of his fractional operator* // Frac. Calc. App. Anal. 2014. V. 17. P. 674–683.
3. Rabotnov Yu.N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*. Moscow: Mir Publishers, 1980.
4. Pryputniewicz R.J., Burstone C.J. *The effect of time and force magnitude on orthodontic tooth movement* // J. Dent. Res. 1979. V. 58. № 8. P. 1754–1764.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ n -МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Дайняк В.В., Кудравец В.М.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
dvv162@tut.by; valeriakudravec@gmail.com

В работах Ж. Адамара [1, 2] было начато изучение краевых задач для простейшего уравнения третьего порядка составного типа, оператор которого представляет собой композицию оператора Лапласа с оператором частной производной по одной из независимых переменных. После этого появился ряд работ, например, [3, 4] и др., посвященных этому уравнению и более общим уравнениям составного типа.

Задача типа Дирихле для уравнения 3 порядка относительно функции $u : x \rightarrow \rightarrow u(x)$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{(n+1)}$ имеет вид [5]:

$$\mathcal{L}(x, D)u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^3 u}{\partial x_0 \partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^3} + \sum_{i=0}^n q_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda(x)u = f(x) \quad (1)$$

Здесь a_i, b_i ($i = 1, \dots, n$) – некоторые постоянные коэффициенты, $\partial q_i / \partial x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) – коэффициенты полинома $\mathcal{A}^{(1)}(x, D)$. Известно, что их производные измеримы и ограничены.

Суть постановки задачи формулируется следующим образом. Через Q обозначим некоторую ограниченную область $(n+1)$ -мерного евклидова пространства переменных x , имеющую кусочно-гладкую границу ∂Q . Через ν обозначим единичный вектор внешней относительно ∂Q нормали. Пусть $\mathcal{L}_0(v)$ имеет вид

$$\mathcal{L}_0(v) = v_0^3 + \sum_{i=1}^n (a_i v_0 v_i^2 + b_i v_i^3). \quad (2)$$

Тогда в области Q задается дифференциальное уравнение (1) относительно искомой функции u , которая удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{\partial Q} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial Q^-} = 0$$

где ∂Q^- – часть ∂Q , в точках $x \in \partial Q^-$ которой $\mathcal{L}_0(v) < 0$.

Задача (1), (2) будем рассматриваться как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}(x, D)u = f(x) \quad (3)$$

с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = H_0^3(Q)$ оператора $\mathcal{L}(x, D)$.

Наряду с задачей (1)–(3) рассматривается сопряженная задача

$$\mathcal{L}'(x, D)v = g(x) \quad (4)$$

с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}') = H_0^3(Q)$ оператора $\mathcal{L}'(x, D)$ и граничными условиями

$$v|_{\partial Q} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial Q^+} = 0,$$

где ∂Q^+ – часть ∂Q , в точках $x \in \partial Q^+$ которой $\mathcal{L}_0(v) > 0$.

Оператор $\mathcal{L}'(x, D)$ является формально сопряженным к $\mathcal{L}(x, D)$:

$$\mathcal{L}'(x, D) = -\frac{\partial^3}{\partial x_0^3} - \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^3}{\partial x_0 \partial x_i^2} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial^3}{\partial x_i^3} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i(x)}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n q_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} - \lambda. \quad (5)$$

Для того чтобы доказать разрешимость уравнения (3) при любых $f \in H_0^{-1}$ необходимо построить такое расширение L оператора $\mathcal{L}$, что множество его значений $R(L)$ совпадает с пространством $H_0^{-1}(Q)$. Оно строится с помощью оператора $\mathcal{L}'$.

Условие 1. Коэффициенты a_i, b_i ($i = 1, \dots, n$) удовлетворяют следующим соотношениям:

- 1) $a_i < 0$, то $b_i \neq 0$;
- 2) $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$;
- 3) $27 + 4 \sum_{i=1}^n (a_i^3 / b_i^2) > 0$.

Условие 2. Коэффициенты q_i , ($i = 1, \dots, n$), λ удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \lambda(x) > 0.$$

Теорема 1. При выполнении условий 1 и 2 для любых $u \in H_0^1(Q)$ и $v \in H_0^1(Q)$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{H_0^1(Q)} \leq c \|Lu\|_{H_0^{-1}}, \quad \|v\|_{H_0^1(Q)} \leq c^* \|\mathcal{L}'v\|_{H_0^{-1}},$$

где c и c^* не зависят от функций u и v .

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 для любого элемента $f \in H_0^{-1}$ существует единственное обобщенное решение и задачи (1), (3), а для любого $g \in H_0^{-1}$ – обобщенное решение v задачи (4), (5).

Таким образом, в работе получены достаточные условия существования и единственности обобщенного решения рассматриваемых задач. С помощью метода энергетических неравенств и операторов осреднения [6] доказаны теоремы существования и единственности рассматриваемых задач.

Литература

1. Hadamar J. *Proprietes d'une equation lineaire aux derivees partielles du quatrieme order* // Tokonu Math. J. 1933. V. 37. P. 133–150.
2. Hadamar J. *Equations aux derivees partielles* // L'enseignement mathematique. 1936. V. 35. P. 5–42.
3. Davis. R.B. *A boundary value problem for third-order linear partial defferential equations of composite type* // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3. P. 751.
4. Джугаев Т.Д. *Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-совставного типов*. Ташкент: Фап, 1979.
5. Корзюк В.И., Дайняк В.В., Протько В.В. *Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка* // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 2012. № 3. С. 116–121.
6. Корзюк В.И. *Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*. Мн.: БГУ, 2013.

МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ТИПА ВОЗМУЩЕННОГО «SWEEPING» ПРОЦЕССА

Зверева М.Б., Каменский М.И.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
margz@rambler.ru; mikhaikamenski@mail.ru

Пусть вдоль отрезка $[0, l]$ натянута струна. Обозначим через $u(x, t)$ отклонение струны от положения равновесия в точке x в момент времени t . Предположим, что левый конец струны жестко закреплен, т.е. $u(0, t) = 0$. В точке $x = l$ установлен ограничитель $C(t)$ на движение упруго закрепленного правого конца струны так, что для всех $t \geq 0$ выполнено $u(l, t) \in C(t)$. Мы рассматриваем случай, когда ограничитель может двигаться в перпендикулярном к оси Ox направлении, и его движение задается как $C(t) = [-h, h] + \xi(t)$, где функция $\xi(t)$ является абсолютно непрерывной на $[0, +\infty)$. Когда $u(l, t)$ является внутренней точкой множества $C(t)$, выполняется условие $u'_x(l, t) + \gamma u(l, t) = 0$, где $\gamma > 0$. Когда струна касается граничных точек ограничителя, в течении некоторого времени выполняются условия $u(l, t) = h + \xi(t)$ или $u(l, t) = -h + \xi(t)$ соответственно.