ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ НЕОДНОРОДНЫХ ПОТОКОВ В МУЛЬТИСЕТЯХ

Пилипчук Л.А., Полячок Е.Н.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
pilipchuk@bsu.by; fpm.polyachoEN1@bsu.by

Рассмотрим конечный связный ориентированный мультиграф (мультисеть) $G = (I, U)$, $K = \{1, 2, \dots\}$ – множество различных типов потока в мультисети G, $|K|$ – максимальная кратность дуг мультисети ($|K| < \infty$), и пусть $G^k = (I^k, U^k)$ – связный орграф, соответствующий типу потока $k \in K$, при этом, если $\exists (i,j)^k \in U^k$, то $\exists (j,i)^k \in U^k$. Чтобы подчеркнуть это различие, мы будем рассматривать $G^k = (I^k, U^k)$ как двунаправленный орграф.

Функция потока $x : U \to R$ удовлетворяет следующей системе:

$$\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U^k)} x_{ji}^k = \begin{cases} 0, & i \in I^k \setminus I_k^*, \\ x_i^k, & i \in I_k^*, \end{cases} \quad k \in K, \tag{1}$$

где $I_k^* \subseteq I^k$, x_i^k – внешний поток узла $i \in I_k^*$, $k \in K$. Если внешний поток $x_i^k > 0$, то узел i^k орграфа G^k – источник, если $x_i^k < 0$, то узел i^k – сток. $I_i^+(U^k) = \{j \in I^k : (i,j)^k \in U^k\}$, $I_i^-(U^k) = \{j \in I^k : (j,i)^k \in U^k\}$, $x = (x_{ij}^k,\ (i,j)^k \in U^k,\ k \in K)$ – вектор неизвестных. Для внешнего потока выполняется условие $\sum_{i \in I_k^*} x_i^k = 0$, $\forall k \in K$. Для дуг $(i,j)^k \in U^k$, $k \in K$ известна доля $p_{ij}^k \in (0,1]$ суммарного потока $\sum_{j \in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k$, проходящего через дугу $(i,j)^k$. Любая дуга $(i,j)^k$ из множества дуг, исходящих из узла $i \in I^k$, $j \in I_i^+(U^k)$, для которой выполняется соотношение $p_{i,j}^k \neq 0$, – каноническая дуга узла $i \in I^k$, $k \in K$.

В результате размещения специальных программируемых устройств(сенсоров) в обозреваемых(monitored) узлах $M \subseteq I$ мультиграфа G априори получена следующая информация о численных значениях мультипотока:

$$x_{ij}^k = f_{ij}^k, j \in I_i^+(U^k), \quad x_{ji}^k = f_{ji}^k, \quad j \in I_i^-(U^k), \quad i \in M^k;$$

$$x_i^k = f_i^k, \quad i \in M^k \bigcap I_k^*, \quad k \in K. \tag{2}$$

На основе известных коэффициентов p_{ij}^k, $(i,j)^k \in U^k$, $k \in K$, иизвестных (наблюдаемых) дуговых потоках (2), регистрируемых сенсорами, установленными в узлах множества M, получим численные значения дуговых потоков через канонические дуги $(i,k_i)^k$:

$$x_{i,j}^k = \beta_{i,j}^k f_{i,k_i}^k, \quad j \in I_i^+(U^k) \backslash \{k_i\}, \quad \beta_{i,j}^k = \frac{p_{i,j}^k}{p_{i,k_i}^k}, \quad |I_i^+(U)| > 1;$$

$$\beta_{i,j}^k = p_{i,k_i}^k = 1, \quad |I_i^+(U^k)| = 1. \tag{3}$$

Сформируем мультиграф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ посредством удаления из мультиграфа G дуг и узлов с известными численными значениями переменных (2), (3), где $\overline{G}^k = (\overline{I}^k, \overline{U}^k)$ – орграф, соответствующий типу потока $k \in \overline{K}$. Составим соответствующую систему сохранения потока для узлов $\overline{I}$ мультиграфа $\overline{G}$ с неизвестными дуговыми потоками $x^k_{i,j}$, $(i,j)^k \in \overline{U}^k$, и неизвестным внешним потоком x^k_i, $i \in \overline{I}^*_k$, $k \in K$. В результате система сохранения потока для мультиграфа $\overline{G}$ примет следующий вид:

$$\sum_{j \in I^+_i(\overline{U}^k)} x^k_{ij} - \sum_{j \in I^-_i(\overline{U}^k)} x^k_{ji} = \begin{cases} a^k_i, & i \in \overline{I}^k \setminus \overline{I}^*_k, \\ x^k_i + b^k_i, & i \in \overline{I}^*_k, \end{cases} \quad a^k_i, b^k_i = \mathrm{const}, \quad k \in K. \tag{4}$$

Заметим, что для неизвестных дуговых потоков $x^k_{i,j}$, $(i,j)^k \in \overline{U}^k$, мультиграфа $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ выполняются соотношения (3):

$$x^k_{i,j} = \beta^k_{i,j} f^k_{i,k_i}, \quad j \in I^+_i(\overline{U}^k) \backslash \{k_i\}, \quad \beta^k_{i,j} = \frac{p^k_{i,j}}{p^k_{i,k_i}}, \quad |I^+_i(\overline{U})| > 1;$$

$$\beta^k_{i,j} = p^k_{i,k_i} = 1, \quad |I^+_i(\overline{U}^k)| = 1. \tag{5}$$

Разреженная система (4), (5) для определения дуговых потоков $x^k_{i,j}$, $(i,j)^k \in \overline{U}^k$, и внешнего потока x^k_i, $i \in \overline{I}^*_k$, в узлах ненаблюдаемой части мультисети $\overline{G}$ может быть *недоопределенной, переопределенной,* или имеет *единственное решение.*

Теорема. *Если для множества обозреваемых узлов M мультиграфа G ранг матрицы системы* (4), (5) *равен числу ее неизвестных, то система* (4), (5) *имеет единственное решение (мультисеть G полностью наблюдаема).*

Задача минимизации размера множества M обозреваемых узлов мультиграфа (мультисети) и идентификация сенсорной конфигурации для установления минимального количества специальных программируемых устройств (сенсоров) (Sensor Location Problem for Multigraph, SLPM) – оптимальное решение задачи SLPM – относится к классу NP-полных задач [3]. Для исследуемого класса NP-полных задач SLPM применение стратегий полного перебора вариантов установки сенсоров для определения минимального числа обозреваемых узлов мультиграфа потребует огромных вычислительных затрат [2, 3]. Для больших мультисетей актуальной прикладной проблемой является решение задачи установки приемлемого количества сенсоров в определенные (обозреваемые) узлы сети для сбора необходимой информации о функции потока с целью нахождения значений дуговых потоков на ее ненаблюдаемой части, что гарантировало бы ее полную наблюдаемость (субоптимальное решение задачи SLPM). Приемлемое количество сенсоров определяется исходя из требований к составу приложений конкретной прикладной проблемы.

Исследованию разреженных недоопределенных систем линейных алгебраических уравнений вида (4), (5) посвящены работы [1, 4–6]. Разработаны методы декомпозиции базисных графов/мультиграфов и на их основе построены алгоритмические, структурные и технологические решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений с матрицами неполного и полного рангов [7].

Литература

1. Pilipchuk L. A. *Sparse Linear Systems and Their Applications.* Minsk: BSU, 2013.

2. Пилипчук, Л.А., Пилипчук А.С., Полячок Е.Н., Фаразей А.И. *Идентификация сенсорной конфигурации и управление потоками* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 2. С. 67–76.

3. Bianco L., Confessore G., Reverberi P. *A network based model for traffic sensor location with implications on O/D matrix estimates* // Transportation Science. 2001. V. 35. № 1. P. 50–60.

4. Pilipchuk L.A., Malakhouskaya Y.V., Kincaid D.R., Lai M. *Algorithms of solving large sparse underdetermined linear systems with embedded network structure* // East-West J. of Mathematics. 2002. V. 4. № 2. P. 191–201.

5. Pilipchuk L., Vecharynski E. and Pesheva Y. *Solution of large linear systems with embedded network structure for a non-homogeneous network flow programming problem* // Mathematica Balkanica. 2008. V. 22. Fasc. 3–4. P. 235–254.

6. Pilipchuk L., Pilipchuk A. and Pesheva Y. *Decomposition of the network support for one non-homogeneous network flow programming problem* // Intern. J. of Pure and Appl. Math. 2010. V. 60. № 3. P. 345–354.

7. Пилипчук, Л.А. *О методах декомпозиции разреженных недоопределенных систем с матрицами полного и неполного ранга* // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2016. № 6 (99). С. 87–90.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ИММУННОЙ РЕАКЦИИ РАСТЕНИЙ

Скворцова М.А.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
sm-18-nsu@yandex.ru

В работе рассматривается модель иммунной реакции растений, описываемая системой дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями [1]:

$$\frac{d}{dt}P(t) = k(S(t)+W(t)) - ke^{-\varepsilon\tau_1}(S(t-\tau_1)+W(t-\tau_1)) - \varepsilon P(t),$$

$$\frac{d}{dt}S(t) = ke^{-\varepsilon\tau_1}(S(t-\tau_1)+W(t-\tau_1)) - S(t)(\lambda I(t) + \delta I(t-\tau_2) + \varepsilon S(t)),$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = I(t)(\lambda S(t) - (z+\sigma) - \delta\phi I(t-\tau_2)),$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = \sigma I(t) + \delta\phi I(t)I(t-\tau_2) - \varepsilon R(t),$$

$$\frac{d}{dt}W(t) = \delta S(t)I(t-\tau_2) - \varepsilon W(t).$$

Здесь $P(t)$ – численность незрелых клеток, $S(t)$ – численность восприимчивых клеток, $I(t)$ – численность инфицированных клеток, $R(t)$ – численность восстановленных клеток, $W(t)$ – численность невосприимчивых клеток. Параметр запаздывания $\tau_1 \geqslant 0$ отвечает за время созревания клетки, параметр запаздывания $\tau_2 \geqslant 0$ – за время задержки реакции иммунной системы на заражение вирусами.

В работе изучается асимптотическая устойчивость двух положений равновесия, соответствующих состоянию системы в случае заражения и состоянию системы в случае выздоровления. Установлены оценки, характеризующие скорости стабилизации решений к положениям равновесия на бесконечности. Получены оценки для множеств притяжения данных положений равновесия. Все величины, присутствующие в оценках, выражены в явном виде через коэффициенты системы. При получении результатов использовались различные функционалы Ляпунова–Красовского [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10086).