

Литература

1. Игнатенко В.В. *Управляемость систем нейтрального типа со многими входами группой обыкновенных динамических регуляторов* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 3. С. 24–33.
2. Габасов Р.Ф., Кирилова Ф.М., Крахотко В.В. *Управляемость линейных стационарных систем* // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203. № 3. С. 537–539.
3. Шкляр Б.Ш. *К проблеме относительной управляемости систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа* // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 8. С. 1443–1450.

ОДИН МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМЫ

Манжулина Е.А., Дмитрук Н.М.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
{fpm.manzhuli,dmitruk}@bsu.by

Рассмотрим линейную стационарную дискретную систему G вида

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \quad t = 0, \dots, T-1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ – состояние системы, управление и выходной сигнал в момент времени t , (A, B) – управляема, (A, C) – наблюдаема.

Траекторией системы G будем называть пару $\{u, y\} = \{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$, удовлетворяющую (1) при некотором начальном состоянии $x(0) \in \mathbb{R}^n$. В каждом конкретном процессе управления реализуется некоторая траектория $\{u^p, y^p\} = \{u^p(t), y^p(t)\}_{t=0}^{T-1}$ системы G , которая определяется реализовавшимся, наблюдателю неизвестным начальным состоянием $x_0^p \in X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$ и поданным на вход системы (1) управлением u^p . Будем считать, что в процессе управления доступны лишь неточные измерения выходных сигналов вида

$$\tilde{y}^p(t) = y^p(t) + \xi(t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

где $\xi(t) \in \Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \|\xi\|_\infty \leq \varepsilon\}$ – неизвестная ограниченная ошибка измерения в момент времени t .

Поставим задачу о минимизации функционала

$$J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$$

на траекториях системы (1) при ограничениях на управления

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^m : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}$$

и выходные сигналы

$$y(t) \in Y(t) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t)\},$$

где $G(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $g(t) \in \mathbb{R}^q$, $t = 0, \dots, T-1$. Ограничения должны быть выполнены с гарантией, т.е. при всех возможных реализациях начального состояния и ошибок измерения. Цель – построение оптимальной обратной связи в режиме реального времени по неполным и неточным измерениям выходного сигнала. В случае известной реализации (A, B, C, D) непрерывной системы G аналогичная задача исследована в работе [1].

В докладе исследуется случай, когда реализация (A, B, C, D) системы в пространстве состояний не известна. Вместо модели (A, B, C, D) будем использовать полученное в [2] представление любой траектории системы G на основе одной априорной траектории $\{u^d, y^d\} = \{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$. Будем считать, что априорная траектория $\{u^d, y^d\}$ измерена точно, для системы G дана верхняя оценка размерности ее состояния n (см. [2]), а управление u^d является постоянно возбуждающим порядка T , т.е. матрица Ганкеля

$$H_T(u^d) = \begin{pmatrix} u^d(0) & \dots & u^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(\tau - 1) & \dots & u^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ u^d(\tau) & \dots & u^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(T - 1) & \dots & u^d(T^d - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix}$$

имеет полный строчный ранг [3]. Здесь блоки U_τ^p и U_τ^f соответствуют «прошлому» и «будущему» относительно текущего момента τ . Аналогичным образом на блоки Y_τ^p , Y_τ^f разбивается матрица Ганкеля $H_T(y^d)$.

Следующая лемма формулирует один из основных результатов работы – принцип разделимости процессов управления и наблюдения в линейных системах, сформулированный для случая, когда математическая модель системы G в пространстве состояний не известна, а доступная информация о системе заключена в одной априорной траектории. Доказательство леммы основано на критерии принадлежности $\{u, y\}$ множеству траекторий системы G (Теорема 3 из [2]), сформулированном в терминах матриц Ганкеля $H_T(u^d)$, $H_T(y^d)$.

Лемма. Пусть $\{u_\tau^p, y_\tau^p\} = \{u^p(t), y^p(t)\}_{t=0}^{\tau-1}$ – некоторая фиксированная прошлая траектория системы G длины $\tau \geq n$. Тогда любая траектория $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$ длины T системы G однозначно представима в виде суммы траекторий $\{0, u, 0, y_0\}$ и $\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$ длины T , причем для фиксированного управления $u = \{u(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$ определить неизвестные будущие участки $y_0 = \{y_0(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$, $\hat{y} = \{\hat{y}(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$ можно следующим образом:

1) найти некоторые решения $\hat{\alpha}(\tau)$, $\alpha_0(\tau)$ алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix};$$

2) вычислить $\hat{y} = Y_\tau^f \hat{\alpha}(\tau)$, $y_0 = Y_\tau^f \alpha_0(\tau)$.

Лемма позволяет обосновать следующую схему управления в реальном времени системой G на основе априорных данных $\{u^d, y^d\}$. При всех $\tau = n, \dots, T-1$ выполнить:

1) найти оценки $\chi_i(t|\tau)$, $i = 1, \dots, q$, $t = \tau, \dots, T-1$, решив задачи

$$\chi_i(t|\tau) = \max_{\hat{\alpha}(\tau)} G_i(t) Y^d(t) \hat{\alpha}(\tau), \quad U_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) = u_\tau^p, \quad U_\tau^f \hat{\alpha}(\tau) = 0, \\ \tilde{y}_\tau^p - \varepsilon 1 \leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon 1, \quad (2)$$

где $G_i(t)$ – i -я строка матрицы $G(t)$;

2) найти решение $\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ задачи

$$\min_{\alpha_0(\tau)} \alpha_0(\tau)^T (U_\tau^f)^T U_\tau^f \alpha_0(\tau), \quad U_\tau^p \alpha_0(\tau) = 0, \quad Y_\tau^p \alpha_0(\tau) = 0, \quad (3)$$

$$G(t) Y^d(t) \alpha_0(\tau) \leq g(t) - \chi(t|\tau), \quad u_{\min} \leq U^d(t) \alpha_0(\tau) \leq u_{\max}, \quad t = \tau, \dots, T-1,$$

где $U^d(t) = (u^d(t), u^d(t+1), \dots, u^d(t+T^d-T))$, аналогично $Y^d(t)$, 1 – единичный вектор;

3) подать на вход системы управление $u^p(\tau) = u^*(\tau|\tau)$, где $u^*(t|\tau) = U^d(t) \alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$.

Задачи (2) являются аналогами задач оптимального наблюдения, задача (3) – аналогом задачи оптимального управления из работы [1] для случая, когда реализация системы G неизвестна и управление осуществляется только на основе априорных данных $\{u^d, y^d\}$.

Практическая эффективность предложенного алгоритма управления иллюстрируется примерами, а теоретическое обоснование его реализуемости дает следующий результат.

Теорема. Если задачи оптимального наблюдения (2) и управления (3) имеют решение в момент времени $\tau = n$, то они разрешимы и при всех $\tau = n+1, \dots, T-1$. При этом критерий качества, значение которого определяется в момент τ как

$$J(\tau) = \sum_{t=0}^{\tau-1} \|u^p(t)\|^2 + \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u^*(t|\tau)\|^2,$$

является невозрастающей функцией от τ .

Литература

1. Габасов Р., Дмитриук Н.М., Кириллова Ф.М. *Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10. № 2. С. 33–57.
2. Berberich J., Allgöwer F. *A trajectory-based framework for data-driven system analysis and control* // European Control Conference. Saint Petersburg, Russia, 2020. P. 1365–1370.
3. Willems J.C., Markovsky I., Rapisarda P., De Moor B.L.M. *A note on persistency of excitation* // Systems & Contr. Lett. 2005. V. 54. P. 325–329.

О СТРУКТУРЕ БАССЕЙНОВ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Мастерков Ю.В., Рогуткин Е.А.

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия
{Jura.masterkov, egorrogutkin}@yandex.ru

Рассматривается линейная управляемая система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m. \quad (1)$$

Здесь A и B – действительные $n \times n$ и $n \times m$ -матрицы, соответственно, а множество Ω является компактным.