7. Тонков Е.Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.

8. Банщикова И.Н. *Глобальная ляпуновская приводимость линейных дискретных систем с периодическими коэффициентами*: дис. ... магистра мат. наук. Ижевск, 2018.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Костюкевич Д.А., Дмитрук Н.М.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
{kostukDA,dmitrukn}@bsu.by

Рассматривается линейная дискретная стационарная система управления с возмущением

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние, $u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_{\min} \leqslant u \leqslant u_{\max}\}$ – значение управления, $w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}^p : \|w\|_\infty \leqslant w_{\max}\}$ – неизвестное возмущение в момент времени t, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times r}, M \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Для траектории системы (1) под действием управления $u(\cdot)$ и возмущения $w(\cdot)$ будем использовать обозначение $x(t|x_0, u(\cdot), w(\cdot)), t = 0, 1, \ldots, T-1$.

Целью управления является: 1) перевод системы (1) с гарантией (при любой реализации $w(\cdot)$) на терминальное множество $X_T = \{x \in \mathbb{R}^n : g_{\min} \leqslant Hx \leqslant g_{\max}\}$ в момент времени T; 2) минимизация гарантированного значения критерия качества $J(u) = \max_{w(\cdot)} c'x(T)$. Здесь $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $g_{\min}$, $g_{\max} \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Пусть до начала процесса управления зафиксирован момент времени $T_1 \in \{1, 2, \ldots, T-1\}$, который будем называть [1, 2] моментом замыкания системы (1). Пусть $\Delta_0 = \{0, 1, \ldots, T_1 - 1\}$, $\Delta_1 = \{T_1, T_1 + 1, \ldots, T-1\}$, $u_k(\cdot) = (u_k(t) \in U, t \in \Delta_k)$, $w_k(\cdot) = (w_k(t) \in W,\ t \in \Delta_k)$ – управление и возмущение на Δ_k, $U_k = \{u_k(\cdot) : u_k(t) \in U, t \in \Delta_k\}$, $W_k = \{w_k(\cdot) : w_k(t) \in W,\ t \in \Delta_k\}$; $X(t|x_k, u_k(\cdot)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(t|x_k, u_k(\cdot), w_k(\cdot)), w_k(\cdot) \in W_k\}$, $k = 0, 1$.

Предположим, что на Δ_0 выбрано управление $u_0(\cdot) \in U_0$. Следуя работам [2, 3], будем считать, что в момент T_1 можно:

1. точно измерить состояние объекта управления $x_1 = x(T_1|x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot))$;
2. с учетом измеренного x_1 выбрать новое управление $u_1 = u_1(\cdot|x_1) \in U_1$.

С учетом сделанных предположений будем искать решение задачи в виде стратегии управления с моментом замыкания T_1 вида

$$\pi_1 = \{u_0(\cdot|x_0); u_1(\cdot|x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0(\cdot|x_0))\}.$$

Определение 1. Стратегия π_1 называется допустимой стратегией управления, если $X(T|x_1, u_1(\cdot|x_1)) \subseteq X_T \ \ \forall x_1 \in X(T_1|x_0, u_0(\cdot))$.

Определение 2. Допустимая стратегия управления

$$\pi_1^0 = \{u_0^0(\cdot|x_0); u_1^0(\cdot|x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0^0(\cdot|x_0))\}$$

называется оптимальной, если $u_0^0(\cdot|x_0)$ является решением задачи

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0(\cdot)\in U_0} \max_{w_0(\cdot)\in W_0} J_1(x(T_1|x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot))), \tag{2}$$

а каждая программа $u_1^0(\cdot|x_1)$ при $x_1 \in X(T_1|x_0, u_0^0(\cdot|x_0))$ является решением задачи

$$J_1(x_1) = \min_{u_1(\cdot)\in U_1} \max_{w_1(\cdot)\in W_1} c'x(T|x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot))$$

при условии $x(T|x_1, u_1(\cdot), w_1(\cdot)) \subseteq X_T \quad \forall w_1(\cdot) \in W_1$.

Основной результат работы – эффективный метод решения задачи (2), позволяющий свести ее к задаче линейного программирования. Для этого сначала задачу (2) представим в эквивалентном виде

$$V(\pi_1^0) = \min_{u_0(\cdot),\alpha} \alpha, \tag{3}$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t), \quad x(0) = x_0, \quad u_0(t) \in U_0, \quad t \in \Delta_0,$$
$$x(T_1) \in X_1(\alpha) = \{x_1 : J_1(x_1) \leqslant \alpha\} \quad \forall w_0(\cdot) \in W_0,$$

Затем построим в внешние аппроксимаций многогранников $X_1(\alpha)$ при всех значениях α. Для этого выберем систему векторов $p_j \in \mathbb{R}^n, j = 1,\dots,m_1, \|p_j\| = 1$, и составим из них матрицу $P_1 \in \mathbb{R}^{m_1\times n}$. Пусть $f(\alpha) = (f_j(\alpha), j = 1,\dots,m_1)$:

$$f_j(\alpha) = \max p_j' x_1, \quad x_1 \in X_1(\alpha). \tag{4}$$

Аппроксимирующий многогранник для $X_1(\alpha)$ имеет вид

$$\bar{X}_1(\alpha) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : P_1 x_1 \leqslant f(\alpha)\}.$$

Следующее утверждение дает простое описание зависимости решений задач (4) от α.

Утверждение. *Пусть для любого* $j = 1,\dots,m_1$ *векторы* p_j *таковы, что имеют место равенства* $\operatorname{rank}(G_1'|c_1) = \operatorname{rank}(G_1'|c_1|p_j) = m+1$, *где* $G_1 = HA^{T-T_1}$, $c_1' = c'A^{T-T_1}$ *Тогда*

$$f(\alpha) = f_0 + \lambda\alpha, \tag{5}$$

где $f_0 = f(0)$, $\lambda = (\lambda_j,\ j = 1,\dots,m_1)$, λ_j *удовлетворяют условиям* $G_1'y + c_1\lambda_j = p_j$, $\lambda_j \geqslant 0$.

Идея доказательства основана на результатах теории двойственности, примененных к задаче (4), и построении явного двойственного решения при предположениях утверждения.

Наконец, заменяя в (3) многогранник $X_1(\alpha)$ его аппроксимацией $\bar{X}_1(\alpha)$, с $f(\alpha)$ согласно (5), и исключая $x(t)$, получим задачу линейного программирования для нахождения $u_0^0(\cdot|x_0)$:

$$\min_{u_0(\cdot),\alpha} \alpha, \tag{6}$$

$$\sum_{t\in\Delta_0} P_1 A^{T_1-t-1} B u_0(t) - \lambda\alpha \leqslant f_0 - \bar{\gamma} - P_1 A^{T_1} x_0,$$

$$u_{\min} \leqslant u_0(t) \leqslant u_{\max}, \quad t \in \Delta_0,$$

где $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_j, j = 1,\dots,m_1) : \bar{\gamma}_j = w_{\max} \sum_{t\in\Delta_0} \|p_j' A^t M\|_1$.

Случай $\operatorname{rank}(G_1'|c_1) = n < m+1$ исследуется аналогично, но вместо аппроксимации $X_1(\alpha)$ строится аппроксимация множества

$$\Xi_1(\alpha) = \Big\{(\xi_0, \xi) \in \mathbb{R}^{m+1} : \exists u_1(\cdot) \in U_1, \quad g_{\min} + \gamma \leqslant \xi + \sum_{t \in \Delta_1} HA^{T-t-1}u_1(t) \leqslant g_{\max} - \gamma,$$

$$\xi_0 + \sum_{t \in \Delta_1} c'A^{T-t-1}D(t)u_1(t) \leqslant \alpha - \gamma_0\Big\},$$

где

$$\gamma(\tau) = (\gamma_i(\tau), \quad i = 1, \ldots, m), \quad \gamma_i = w_{\max} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} \|h_i'A^tM\|_1, \quad \gamma_0 = w_{\max} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} \|c'A^tM\|_1.$$

Результирующая в этом случае задача линейного программирования также имеет общий вид (6), однако правила вычисления матрицы P_1, векторов f_0 и λ отличны.

Литература

1. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. № 44 (2). С. 265–286.

2. Дмитрук Н.М. *Оптимальная стратегия с одним моментом замыкания в линейной задаче оптимального гарантированного управления* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2018. № 58 (2). С. 664–681.

3. Kostyukova O., Kostina E. *Robust optimal feedback for terminal linear-quadratic control problems under disturbances* // Math. Programming. 2006. № 107 (1–2). P. 131–153.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ ДЕСКРИПТОРНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ

Крахотко В.В., Размыслович Г.П.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
{Krakhotko,razmysl}@bsu.by

В теории оптимального управления одной из важных проблем является проблема управляемости динамических систем. В теории управляемости динамических систем управления, как правило, выбираются из различных классов функций: кусочно-непрерывные, кусочно-линейные, кусочно-постоянные, релейные и т.д. Особый интерес представляют управления, которые генерируются с помощью дифференциальных регуляторов [1]. В докладе рассматривается задача относительной управляемости линейной системы с запаздыванием по состоянию с помощью дифференциального дескрипторного регулятора.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$