2. Стрелкова Н.А. *Минимизация линейной комбинации времени и энергетических затрат в задаче оптимального управления вращениями динамически симметричного твердого тела* // Вестн. Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3. С. 81–85.

3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1983.

4. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.

# ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Калитин Б.С.**

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Kalitine@yandex.by

Доклад посвящен историческому развитию и современному состоянию проблем неустойчивости положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений, исследуемых с помощью метода функций Ляпунова. Основное внимание уделено, теоремам Ляпунова–Четаева–Красовского о неустойчивости и их обобщениям. Указаны некоторые эффективные направления качественной теории дифференциальных уравнений в изучении неустойчивости. Дан анализ методов решения задач неустойчивости равновесия для различных типов дифференциальных уравнений (автономных и неавтономных, периодических и почти периодических).

Основополагающие концепции понятий устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для систем нелинейных дифференциальных уравнений введены А.М. Ляпуновым [1]. Им предложен важный метод исследования проблем устойчивости состояний равновесия, основанный на использовании вспомогательных функций (функций Ляпунова). Метод функций Ляпунова или, как сейчас принято называть, прямой метод Ляпунова, получил необъятно широкое распространение в исследованиях ученых благодаря своей относительной простоте и эффективности. Универсальность метода подтверждается не только огромным количеством работ мирового научного сообщества по его развитию и всевозможным модификациям применительно к тем, или иным направлениям современной математики, но и той значимой практической направленностью при решении конкретных задач естественных, а также и общественных дисциплин разнообразных областей наук, где в соответствующих формализованных моделях протекают динамические процессы.

Поскольку метод функций Ляпунова не требует непосредственного интегрирования решений нелинейных дифференциальных систем, то это прочно связывает его с качественной теорией динамических систем. По мере развития и совершенствования прямого метода такая связь обнаруживает все более тесный характер, где оба направления научных интересов обогащают друг друга.

В основе метода лежит использование вспомогательной непрерывно дифференцируемой функции $V : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ определенной в некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$ точки покоя $x = 0$, причем $V(0,t) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}^+$. Если при этом $V(x,t) \geqslant a(\|x\|)$ для

$a \in \mathbf{K}$, $x \in U$ и $\forall t \in \mathbb{R}^+$, то функцию $V$ принято называть определенно положительной. Здесь $\mathbf{K}$ – множество непрерывных возрастающих функций $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $a(0) = 0$. Если $V(x,t) \geqslant 0$ $\forall x \in U$ и $\forall t \in \mathbb{R}^+$, то функцию $V$ называют знакоположительной. Предлагая идею поиска (подбора) функции $V$ для решения задач устойчивости А.М. Ляпунов опирается на изучение свойств монотонности суперпозиции функций $V(x(t),t)$ при изменении времени $t$ вдоль решения $x(t)$ системы дифференциальных уравнений. С этой целью рассматривается понятие производной $\dot{V}$ по времени от функции $V$ вдоль решений.

В монографии [1] метод функций Ляпунова представлен в виде следующих основополагающих утверждений: *теорема об устойчивости, две теоремы о неустойчивости и теорема об асимптотической устойчивости*, которыми пользуются уже более 125 лет ученые всего мира. По единодушному мнению А.М. Ляпунов разработал в высшей степени надежный и эффективный инструмент решения проблем, созданной им теории устойчивости движения.

Впоследствии исследования ученых дополнили и обогатили арсенал теорем прямого метода. Во-первых, расширен применяемый класс вспомогательных функций $V(x,t)$, пригодных для изучения задач устойчивости, что крайне важно с прикладной точки зрения, поскольку не разработан универсальный метод поиска подходящей в практическом смысле функции Ляпунова. До сих пор задача поиска $V$ зависит в большей степени от интуиции и навыков исследователя. Во-вторых, открылись новые направления дальнейшего развития теории устойчивости для разнообразных процессов динамики, а представленные ими результаты сохранили преемственность идей и формулировок академика А.М. Ляпунова.

Большой вклад в теорию метода функций Ляпунова сделали (в алфавитном порядке): А.Ю. Александров, Л.Ю. Анапольский, А.С. Андреев, Ц. Артстейн, Ж. Аусландер, Е.А. Барбашин, Н.Г. Булгаков, Н.П. Бхатия, С.Н. Васильев, В.Г. Веретенников, В.И. Зубов, А.О. Игнатьев, Г.В. Каменков, В.Б. Колмановский, А.А. Косов, Н.Н. Красовский, Ж. Ля-Салль, В.М. Матросов, В.Р. Носов, Н.О. Седова, С.В. Павликов, К.П. Персидский, В.В. Румянцев, Г. Сеге, П. Сейберт, Д.Я. Хусаинов, Н.Г. Четаев, А.А. Шестаков и многие другие, среди которых работы автора настоящего доклада.

Исторически первым продвижением теории второго метода явилась теорема Н.Г. Четаева о неустойчивости [2, с. 28]. В ней были ослаблены условия Ляпунова относительно производной $\dot{V}$ функции $V$ в том предположении, что $\dot{V}$ можно требовать определенно положительной не во всей окрестности нуля, а только в области, где $V > 0$.

В работе [3] Е.А. Барбашин и Н.Н. Красовский впервые ввели в обиход класс знакоопределенных функций Ляпунова со *знакопостоянной производной по времени* и представили критерий устойчивости в целом. В их исследованиях подчеркнуты успешные перспективные возможности применения на практике такого множества функций, а также отмечены некоторые методы их построения в исследовании проблемы асимптотической устойчивости (локальной и глобальной) и неустойчивости.

Начиная с работы Н.Г. Булгакова и Б.С. Калитина [4] стали рассматриваться критерии устойчивости с использованием более широкого класса *знакопостоянных функций Ляпунова со знакопостоянной производной по времени*, которые оказали влияние на дальнейшее развитие и обобщение идей Ляпунова–Барбашина–Красовского [5–7].

Отметим также использование теории предельных уравнений [8] для изучения характера движений нестационарных процессов и метод вложения неавтономного дифференциального уравнения в автономную динамическую систему на подходящем метрическом пространстве [7, 9]. Естественно, что имеется много других значимых результатов по проблеме неустойчивости равновесия, составить сегодня полный перечень которых довольно затруднительно.

**Литература**

1. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* М.: Гостехиздат, 1950.

2. Четаев Н.Г. *Устойчивость движения.* М.: Наука, 1990.

3. Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. *Об устойчивости движения в целом.* // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453–456.

4.Булгаков Н.Г., Калитин Б.С. *Обобщение теорем второго метода Ляпунова. 1. Теория.* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1978. № 3. С. 32–36.

5. Булгаков Н.Г. *Знакопостоянные функции в теории устойчивости.* Мн.: Университетское, 1984.

6. Калитин Б.С. *Устойчивость дифференциальных уравнений (Метод знакопостоянных функций Ляпунова).* Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.

7. Калитин Б.С. *Устойчивость неавтономных дифференциальных уравнений.* Мн.: БГУ, 2013.

8.Андреев А.С. *Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем.* // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43. № 5. С. 796–805.

9. Калитин Б.С. *Устойчивость динамических систем (Качественная теория).* Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.

## РАВНОМЕРНАЯ ГЛОБАЛЬНАЯ ДОСТИЖИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Козлов А.А., Калита К.Д.**

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь
kozlovaa@tut.by; kalitakd@yandex.ru

Пусть $\mathbb{R}^n$ – $n$-мерное векторное евклидово пространство, $\mathrm{M}_{mn}$ – пространство вещественных $(m \times n)$-матриц со спектральной (операторной) нормой, т.е. нормой, индуцируемой на $\mathrm{M}_{mn}$ евклидовыми нормами в векторных пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$; $\mathrm{M}_n := \mathrm{M}_{nn}$; $E \in \mathrm{M}_n$ – единичная матрица. Под отрезком $[k, s]$, где $k, s \in \mathbb{Z}$, $k < s$, будем понимать совокупность целочисленных точек вещественного отрезка $[k, s]$, т.е. множество точек $k, k+1, \ldots, s \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим линейную дискретную систему управления [1, с. 214]

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

в которой $\{A(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{B(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – ограниченные, $\omega$-периодические последовательности соответственно $(n \times n)$- и $(n \times m)$- вещественных матриц $(\omega \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$; $x = x(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы; $u = u(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ – управляющее воздействие.

**Определение 1.** Последовательность матриц $N(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, называется *$\omega$-периодической* [1, с. 73], если найдется $\omega \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства $N(k+\omega) = N(k)$.