Теорема. *Справедливо включение*

$$[x(t,s)] \subseteq \sum_{j=0}^{t} [F^{0,s+j}(t,s)][\alpha(s+j)] + \sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{t-i-1} [F^{i+1,s+j}(t,s)]([B(i,s+j)][u(i,s+j)]). \quad (6)$$

Интервальную функцию в правой части включения (6) назовем приближенным решением задачи Коши (1). Приближенное решение выражается через параметры исходной задачи (2) в терминах решений определяющего уравнения (4) с начальными условиями (5) и, очевидно, служит внешней аппроксимацией точного решения.

Заметим, что включение (6) становится равенством в некоторых частных случаях, например; для точечных (не интервальных) матриц и векторов.

Представление (6) в дальнейшем можно использовать для получения условий управляемости и стабилизируемости интервальных нестационарных дискретных систем.

Литература

1. Гайшун И.В. *Многопараметрические системы управления.* Мн.: Навука і тэхніка. 1996.

2. Горячкин В.В., Писаренко А.А. *Задача Коши для двухпараметрической нестационарной дискретной системы* // Вестн. БГУ. Сер. Математика, информатика. 2010. № 1.

3. Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* М.: Мир, 1987.

4. Шарый С.П.*Конечномерный интервальный анализ.* Новосибирск: XYZ, 2019.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

Калинин А.И., Лавринович Л.И.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
{kalininai,lavrinovich}@bsu.by

Представленный доклад является обобщением результатов, полученных в [1] на случай, когда время перехода в конечное состояние не фиксировано. Следует отметить, что данное обобщение является вполне естественным в прикладных задачах (см., например, [2]).

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t))$, $t \in$ $\in T = [t_0, t_1]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$x(t_1) = 0, \quad J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (1 + x^{\mathrm{T}} Q(t)x + u^{\mathrm{T}} P(t)u)\, dt \to \min, \quad (2)$$

где μ – малый (по модулю) параметр, t_0 – заданный момент времени, t_1 – нефиксированный конечный момент времени $(t_1 > t_0)$, x – n-вектор, $f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$, – нелинейная вектор-функция, $Q(t)$ – неотрицательно-определенная симметрическая матрица, а $P(t)$ – положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \in$ $\in T$. В дальнейшем для определенности будем считать управления непрерывными справа в любой момент времени.

Предположение 1. Элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$, принадлежат классу C^p, $p \geqslant 1$.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка $(N = 0, 1, 2, \dots)$ в задаче (1), (2), если оно переводит систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества $J(u)$ от оптимального управления на величину того же порядка малости.

В докладе предложен алгоритм, с помощью которого для заданного числа N $(N \leqslant \leqslant p)$ можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассматриваемой задаче. Алгоритм опирается на конструктивное доказательство теоремы о существовании при сделанных предположениях гладкого оптимального управления и его асимптотических свойствах. Его суть состоит в построении полиномов Тейлора определяющих элементов оптимального управления. Такими элементами в данной задаче являются конечный момент времени, а также начальные значения сопряженных переменных, которые в силу принципа максимума [3] соответствуют оптимальному управлению. Эти определяющие элементы как функции малого параметра принадлежат классу C^p.

Вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений начинаются с решения базовой задачи, которая формально получается из исходной при $\mu = 0$, и в отличие от нее является задачей оптимизации линейной системы.

Предположение 2. Динамическая система в базовой задаче является вполне управляемой [4].

При сделанном предположении в базовой задаче существует единственное оптимальное управление, которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума [3] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть t_1^0 – оптимальное время перехода, $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in T^0 = [t_0, t_1^0]$, – оптимальные управление и траектория в базовой задаче, тогда существует такое решение $\psi^0(t)$, $t \in T^0$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^{\text{т}}(t)\psi + Q(t)x^0(t),$$

что выполняются условия

$$\psi^{0\text{т}}(t)B^{\text{т}}(t)u^0(t) - u^{0\text{т}}(t)P(t)u^0(t) = \max_{u \in \mathbb{R}^r}(\psi^{0\text{т}}(t)B^{\text{т}}(t)u - u^{\text{т}}P(t)u), \quad t \in T^0, \tag{3}$$

$$\psi^{0\text{т}}(t_1^0)B^{\text{т}}(t_1^0)u^0(t_1^0) - u^{0\text{т}}(t_1^0)P(t_1^0)u(t_1^0) = 1.$$

Из условия (3) непосредственно следует

$$u^0(t) = \frac{1}{2}P^{-1}(t)B^{\text{т}}(t)\psi^0(t).$$

Вычислительная процедура при построении асимптотически субоптимальных управлений помимо решения базовой задачи, которая является линейно-квадратичной, включает интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Заметим, что при сделанных предположениях асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка является решение базовой задачи.

Литература

1. Калинин А.И. Лавринович Л.И. *Применение метода возмущений к задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 3–12.

2. Стрелкова Н.А. *Минимизация линейной комбинации времени и энергетических затрат в задаче оптимального управления вращениями динамически симметричного твердого тела* // Вестн. Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3. С. 81–85.

3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1983.

4. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Калитин Б.С.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Kalitine@yandex.by

Доклад посвящен историческому развитию и современному состоянию проблем неустойчивости положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений, исследуемых с помощью метода функций Ляпунова. Основное внимание уделено, теоремам Ляпунова–Четаева–Красовского о неустойчивости и их обобщениям. Указаны некоторые эффективные направления качественной теории дифференциальных уравнений в изучении неустойчивости. Дан анализ методов решения задач неустойчивости равновесия для различных типов дифференциальных уравнений (автономных и неавтономных, периодических и почти периодических).

Основополагающие концепции понятий устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для систем нелинейных дифференциальных уравнений введены А.М. Ляпуновым [1]. Им предложен важный метод исследования проблем устойчивости состояний равновесия, основанный на использовании вспомогательных функций (функций Ляпунова). Метод функций Ляпунова или, как сейчас принято называть, прямой метод Ляпунова, получил необъятно широкое распространение в исследованиях ученых благодаря своей относительной простоте и эффективности. Универсальность метода подтверждается не только огромным количеством работ мирового научного сообщества по его развитию и всевозможным модификациям применительно к тем, или иным направлениям современной математики, но и той значимой практической направленностью при решении конкретных задач естественных, а также и общественных дисциплин разнообразных областей наук, где в соответствующих формализованных моделях протекают динамические процессы.

Поскольку метод функций Ляпунова не требует непосредственного интегрирования решений нелинейных дифференциальных систем, то это прочно связывает его с качественной теорией динамических систем. По мере развития и совершенствования прямого метода такая связь обнаруживает все более тесный характер, где оба направления научных интересов обогащают друг друга.

В основе метода лежит использование вспомогательной непрерывно дифференцируемой функции $V: U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ определенной в некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$ точки покоя $x = 0$, причем $V(0,t) = 0\ \ \forall t \in \mathbb{R}^+$. Если при этом $V(x,t) \geqslant a(\|x\|)$ для