

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Горячкин В.В., Крахотко В.В.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
krakhotko@bsu.by

Нестационарная двухпараметрическая дискретная система вида

$$x(t+1, s) = A(t, s)x(t, s+1) + D(t, s)x(t, s) + B(t, s)u(t, s) \quad (1)$$

достаточно полно исследована. Найдено представление решения в форме Коши и исследован ряд структурных свойств [1]. Для интервальной системы вида (1) построение решения весьма нетривиальная задача. В данном сообщении, используя технику работы [2], дано построение приближенного решения интервальной нестационарной дискретной системы в форме Коши.

Введем обозначение: вещественный интервал будем записывать в виде

$$[v] = [v_1, v_2] \in I(R).$$

Аналогично будем обозначать интервальные матрицы и векторы. В остальном будем придерживаться общепринятых обозначений [3,4]. В рамках интервального исчисления рассмотрим во множестве $\Omega = [0, T] \times [s, s + T]$, $s \in Z$, $T \in Z_+$ задачу Коши

$$\begin{aligned} x[(t + 1, s)] &= [A(t, s)][x(t, s + 1)] + [D(t, s)][x(t, s)] + [B(t, s)][u(t, s)], \\ [x(0, s)] &= [\alpha(s)] \end{aligned} \quad (2)$$

для интервальной двухпараметрической системы.

Здесь интервальные матрицы $[A(t, s)], [D(t, s)] \in I(R^{n \times n})$, $[B(t, s)] \in I(R^{q \times n})$; $[\alpha(s)] \in I(R^n)$ – известный интервальный вектор; $[u(t, s)] \in I(R^q)$ – интервальное управляющее воздействие; $[x(t, s)]$ – вектор состояния; $(t, s) \in \Omega$ – независимая переменная. Арифметические операции понимаем в смысле классической интервальной арифметики [1].

Зафиксируем пару $(t, s) \in \Omega$. Траекторией (точным решением) [4] задачи Коши для системы (2) назовем последовательность интервальных векторов

$$\left\{ \begin{aligned} [x(0, j)] &= [\alpha(j)], \\ j &= s, s + 1, \dots, s + t \end{aligned} \right\},$$

$$\left\{ \begin{aligned} [x(i + 1, j)] &= [A(i, j)][x(i, j + 1)] + [D(i, j)][x(i, j)] + [B(i, j)][u(i, j)], \\ i &= 0, 1, 2, \dots, t - 1, \\ j &= s, s + 1, \dots, s + t - i - 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Поскольку арифметические операции определяют интервальные векторы (3) однозначно, то задача Коши имеет единственное решение.

По параметрам системы (2) составим рекуррентное соотношение (определяющее уравнение)

$$\begin{aligned} [F^{i,j}(t, s)] &= [F^{i+1,j-1}(t, s)][A(i, j + 1)] + [F^{i+1,j}(t, s)][D(i, j)], \\ i &= t, t - 1, \dots, 1, 0, \\ j &= s + t - i, s + t - i - 1, \dots, s + 1, s, \end{aligned} \quad (4)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} [F^{i,j}(t, s)] &= 0 \quad \text{при} \quad j < s; \quad \text{или} \quad i + j > t + s; \\ [F^{i,j}(t, s)] &= E \quad \text{при} \quad i = t, \quad j = s. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь 0 и E – нулевая и единичная точечные матрицы [3, с. 15, с. 127] (матрица C точечная, если $C = [C] = [C, C]$). Очевидно, что такие матрицы определяются однозначно для всех $i, j = 0, 1, 2, \dots$, и $(t, s) \in \Omega$.

Теорема. *Справедливо включение*

$$[x(t, s)] \subseteq \sum_{j=0}^t [F^{0,s+j}(t, s)][\alpha(s + j)] + \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{t-i-1} [F^{i+1,s+j}(t, s)]([B(i, s + j)][u(i, s + j)]). \quad (6)$$

Интервальную функцию в правой части включения (6) назовем приближенным решением задачи Коши (1). Приближенное решение выражается через параметры исходной задачи (2) в терминах решений определяющего уравнения (4) с начальными условиями (5) и, очевидно, служит внешней аппроксимацией точного решения.

Заметим, что включение (6) становится равенством в некоторых частных случаях, например; для точечных (не интервальных) матриц и векторов.

Представление (6) в дальнейшем можно использовать для получения условий управляемости и стабилизируемости интервальных нестационарных дискретных систем.

Литература

1. Гайшун И.В. *Многопараметрические системы управления*. Мн.: Навука і тэхніка. 1996.
2. Горячкин В.В., Писаренко А.А. *Задача Коши для двухпараметрической нестационарной дискретной системы* // Вестн. БГУ. Сер. Математика, информатика. 2010. № 1.
3. Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления*. М.: Мир, 1987.
4. Шарый С.П. *Конечномерный интервальный анализ*. Новосибирск: XYZ, 2019.