ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Альсевич В.В., Цитович П.В.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
alsevichvv@mail.ru

В классе дискретных управляющих воздействий рассматривается задача оптимального управления:

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), u(t)), \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(t) = \gamma(t), \quad t \in [-\alpha(0), 0], \tag{2}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T. \tag{3}$$

Здесь: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $y(t) = x(\nu(t))$, $\nu(t) = t - \alpha(t)$, $\alpha(t) > 0$ – непрерывно дифференцируемая функция-запаздывание, $\gamma(t)$, $t \in [-\alpha(0), 0]$, – заданная функция, U – выпуклый компакт, $f(x, y, u) = B(x, y)u$. Будем предполагать, что $\dot{\alpha}(t) < 1$. Тогда существует непрерывно дифференцируемая обратная функция $t = r(\tau)$ к $\tau = \nu(t)$.

Управляющее воздействие $u(t)$, $t \in T$, называется дискретным (с периодом квантования $h > 0$), если

$$u(\tau) = u(t), \quad \tau \in [t, t + h[, \quad t \in T_h = \{0, h, 2h, \ldots, t^* - h\},$$

где $h = t^*/N$, N – натуральное число. Дискретные управляющие воздействия отличаются от кусочно-постоянных тем, что их точками разрыва могут быть только моменты множества T_h.

Для обыкновенных систем с произвольной функцией $f(x, u)$ в [1] доказан принцип квазимаксимума, а для частного случая задачи (1)–(3) без запаздывания – дискретный принцип максимума.

Для систем с запаздыванием самого общего вида в [2] доказан принцип максимума в случае кусочно-непрерывных управлений. В данном докладе приводится дискретный принцип максимума для систем с запаздыванием, когда в качестве допустимых управлений рассматриваются дискретные функции. Заметим, что правая часть системы (2) имеет специальный вид. Отметим также, что в [3] дискретный принцип максимума приведен для системы с постоянным запаздыванием и несколько иной правой частью системы (2).

Будем предполагать, что функции $B(x, y)$, $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы по своим переменным. С целью упрощения рассмотрен случай, когда $\alpha(t) > h$ для любого $t \in T$.

Пусть $u(t),\ t\in T,$ – допустимое управление в задаче (1)–(3), $x(t),\ t\in T,$ – соответствующее решение системы (2). Введем обозначения $\delta_\omega(t)=1,$ если $t\in\omega,$ $\delta_\omega(t)=0,$ если $t\notin\omega,$ $H(t)=H(x(t),y(t),\psi(t),u(t))=\psi'(t)B(x(t),y(t))u(t).$ Здесь $\psi(t),\ t\in T,$ – решение сопряженной системы

$$\dot\psi(t)=-\frac{\partial H(t)}{\partial x}-\delta_{[0,\nu(t^*)[}(t)\frac{\partial H(r(t))}{\partial y}\dot r(t),\quad t\in T, \tag{4}$$

$$\psi(t^*)=-\frac{\partial\varphi(x(t^*))}{\partial x}. \tag{5}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 (дискретный принцип максимума). *Если* $u(t),\ t\in T,$ – *оптимальное управление в задаче* (1)–(3), *то вдоль него и соответствующих решений* $x(t),\ t\in T,$ *прямой системы* (2) *и* $\psi(t),\ t\in T,$ *сопряженной системы* (4), (5) *выполняется условие*

$$\Bigg(\int\limits_t^{t+h}\psi'(s)B(x(s),y(s))\,ds\Bigg)u(t)=\max_{v\in U}\Bigg(\int\limits_t^{t+h}\psi'(s)B(x(s),y(s))\,ds\Bigg)v,\quad t\in T_h. \tag{6}$$

Условие (6) может оказаться неэффективным при проверке допустимого управления на оптимальность. В этом случае можно использовать другие условия.

Допустимое управление $u(t),\ t\in T,$ называется особым на $\tilde T_h\subseteq T_h,$ $\operatorname{mes}\tilde T_h>0,$ если на нем и соответствующих решениях $x(t),\ \psi(t),\ t\in T,$ прямой и сопряженной систем выполняется тождество

$$\Bigg(\int\limits_t^{t+h}\psi'(s)B(x(s),y(s))\,ds\Bigg)u(t)\equiv\Bigg(\int\limits_t^{t+h}\psi'(s)B(x(s),y(s))\,ds\Bigg)v,\quad \forall v\in U,\quad t\in\tilde T_h.$$

В классе кусочно непрерывных управлений для произвольной правой части системы (2) необходимые условия оптимальности особых управлений для обыкновенных систем доказаны в [4], для систем с постоянным запаздыванием – в [5]. Для сокращения записей обозначим $B(t)=B(x(t),y(t)),$ $f(t)=B(t)u(t).$ Будем также считать, что функции $B(x,y),$ $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по своим переменным. При указанных условиях в классе дискретных управлений для задачи (1)–(3) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $u(t),\ t\in T,$ – *оптимальное особое управление в задаче* (1)–(3), *то вдоль него и соответствующих решений* $x(t)$ *и* $\psi(t),\ t\in T,$ *прямой системы* (2) *и сопряженной системы* (4), (5) *выполняется условие* (6) *для* $t\notin\tilde T_h,$ *а для* $t\in\tilde T_h$ – *условие*

$$(v-u(t))'\Bigg(\int\limits_t^{t+h}\Bigg(B'(\tau)\overline\Psi(\tau)+\bigg(\frac{\partial\psi'(\tau)B(\tau)}{\partial x}\bigg)'\Bigg)\int\limits_t^{\tau}B(s)\,ds\,d\tau\Bigg)(v-u(t))\leqslant 0,\quad v\in U,$$

где $\overline\Psi(t)=\Psi(t)+C(t),$ $C(t)=\delta_{[0,\nu(t^*)[}(t)\int_{t+h}^{t^*}G(\tau,t)\,d\tau,$ $\Psi(t)$ – *решение матричного уравнения*

$$\dot\Psi(t)=-\frac{\partial f'(t)}{\partial x}\Psi(t)-\Psi(t)\frac{\partial f(t)\partial x}{-}\frac{\partial^2H(t)}{\partial x^2}-\delta_{[0,\nu(t^*)[}(t)\frac{\partial^2H(r(t))}{\partial y^2}\dot r(t),\quad t\in T,$$

$$\Psi(t^*)=-\frac{\partial^2\varphi(x(t^*))}{\partial x^2},\quad G(\tau,t)=F'(\tau,t)\Gamma(\tau,t)+\Gamma'(\tau,t)F(\tau,t),$$

$$\Gamma(\tau,t)=\left(\frac{\partial^2 H(\tau)}{\partial x\partial y}+\Psi(\tau)\frac{\partial f(\tau)}{\partial y}\right)F(\nu(t),t),$$

$F(\tau,t)$ – *решение уравнения*

$$\frac{\partial F(\tau,t)}{\partial t}=-F(\tau,t)\frac{\partial f(t)}{\partial x}-\delta_{[0,\nu(t^*)[}F(\tau,r(t))\frac{\partial f(t)}{\partial y},\quad F(t,t)=E.$$

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В., Калинин А.И., Крахотко В.В., Павленок Н.С. *Методы оптимизации.* Мн.: Четыре четверти, 2011.

2. Альсевич В.В. *Оптимизация динамических систем с запаздываниями.* Мн.: БГУ, 2000.

3. Габасов Р., Альсевич В.В., Русакова Д.В. *Оптимизация динамических систем с запаздыванием в классе дискретных управляющих воздействий* // Междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» к 95-летию со дня рожд. акад. Е.А. Барбашина: тез. докл. Минск, 1–5 окт. 2013 г. Мн.: БГУ, 2013. С. 103–105.

4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Особые оптимальные управления.* М.: Наука, 1973. (Переизд. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2012.)

5. Альсевич В.В. *Условия оптимальности для систем с запаздыванием в классе дискретных управляющих воздействий* // XIX Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям «Еругинские чтения–2019»: тез. докл. междунар. науч. конф., Могилев, 14–17 мая 2019 г. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси. 2019. Ч. 1. С. 102–104.