ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕКОТОРЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Васьковский М.М., Прохоров Н.П.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
vaskovskii@bsu.by; nprohorovminsk@mail.ru

В работе [1] были исследованы свойства комплексной экспоненты, связанные с плотностью образов ее итераций от прямых на комплексной плоскости. Рассмотрим прямые на $\mathbb{C}$, параметризованные следующим образом:

$$L_\alpha(p) = \{p + (\alpha + i)t : t \in \mathbb{R}\},$$

где $p \in \mathbb{C}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Было доказано, что для почти любого α (относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$) множество $\exp^{\circ 2}(L_\alpha(p))$ плотно в комплексной плоскости, и для любого $\alpha \neq 0$ множество $\exp^{\circ n}(L_\alpha(p))$ плотно в $\mathbb{C}$ для $n \geqslant 3$.

Данный результат может быть рассмотрен как построение класса гладких кривых, которые являются плотными на плоскости. С другой стороны, данные кривые являются решениями задачи Коши некоторых дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$z' = (\alpha + i)z \,\mathrm{Ln}\,(z),$$

где $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ достаточно гладкая функция, а Ln – главная ветвь комплексного логарифма. Решением задачи Коши с $z(0) = \lambda \in \mathbb{C}$ является $z(t) = \lambda e^{e^{t(\alpha+i)}}$. Таким образом, почти для любого α невырожденные интегральные кривые данного дифференциального уравнения являются плотными в $\mathbb{C}$. Аналогично, невырожденные интегральные кривые уравнения

$$z' = (\alpha + i)z \,\mathrm{Ln}\,(z) \,\mathrm{Ln}\,\mathrm{Ln}\,(z),$$

являются плотными на комплексной плоскости для любого ненулевого действительного α.

В работе [2] нами были построены классы функций, обладающих свойствами, схожими с вышеописанными, а именно, нами были введены следующие классы голоморфных отображений комплексной плоскости:

Определение 1. Будем говорить, что голоморфное отображение $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathcal{A}$, если выполнены следующие условия:

$(\mathcal{A}_1)$: функция f является T-периодической для некоторого положительного действительного числа T;

$(\mathcal{A}_2)$: существует конечное множество $H=\{h_1,\dots,h_m\}$ действительных чисел таких, что можно задать обратную однозначную аналитическую функцию $\lambda(z)=$ $=f^{-1}(z)$ на множестве $\mathbb{C}\setminus E$ и $f'(z)\neq 0$ $\forall z\in\mathbb{C}\setminus E$, где $E\subset\mathbb{C}$ множество точек на линиях $z=t+ih_k$, $t\in\mathbb{R}$, $k=1,\dots,m$;

$(\mathcal{A}_3)$: для любого действительного $h\notin H$ существует константа $c(h)$, такая что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|\lambda'(t+ih)|\leqslant c(h);$$

$(\mathcal{A}_4)$: для любого фиксированного действительного $h\notin H$ функция $\varphi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, ограничена и $\psi'(t)/\varphi'(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, где

$$\varphi(t)=\mathrm{Re}\,(\lambda(t+ih)),\quad \psi(t)=\mathrm{Im}\,(\lambda(t+ih)).$$

Определение 2. Будем говорить, что голоморфное отображение $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathcal{B}$, если выполнены условия $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_4)$ и дополнительно следующие условия(здесь будем использовать обозначения введенные в определении класса $\mathcal{A}$):

$(\mathcal{B}_1)$: для любого действительного $h\notin H$ существует положительное действительное число ε такое, что

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\zeta\in[h-\varepsilon,h+\varepsilon]}|\lambda'(t+i\zeta)|=0;$$

$(\mathcal{B}_2)$: для любого $p\in\mathbb{C}$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\delta>0$, $l>0$ существует отрезок $[t_1,t_2]$ такой, что длина отрезка кривой $\eta(t)=f(p+t(i+\alpha))$, $t\in[t_1,t_2]$, не менее l, и угол наклона $\eta(t)$ принимает значения между $1/2\delta$ и $1/\delta$ для любого $t\in[t_1,t_2]$.

В следующих двух теоремах доказывается, что функции, принадлежащие классам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, обладают необходимыми свойствами:

Теорема 1. Пусть $p\in\mathbb{C}$ и функция $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathcal{A}$. Тогда для почти любого $\alpha\in\mathbb{R}$ множество $f^{\circ(2)}(L_\alpha(p))$ плотно в $\mathbb{C}$.

Теорема 2. Пусть $p\in\mathbb{C}$ и функция $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Тогда для любого $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ множество $f^{\circ(3)}(L_\alpha(p))$ плотно в $\mathbb{C}$.

Исходя из следующего замечания, схожее свойство верно и для более высоких итераций:

Замечание 1. Пусть $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ непрерывно и $f^{\circ n}(\mathbb{C})$ плотно в $\mathbb{C}$, тогда для любого $m\geqslant 0$ множество $f^{\circ(n+m)}(\mathbb{C})$ также является плотным на комплексной плоскости.

Также были построены примеры конкретных функций, принадлежащих указанным классам.

Теорема 3. Функции $f(z)=e^z$ и $g(z)=\sin z$ принадлежат классам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Полученные классы отображений позволяют строить однородные дифференциальные уравнения в комплексной плоскости с интегральными кривыми, которые плотны в ней. Отметим, что проверка принадлежности функций к данным классам, обладающим нетривиальным топологическим свойством, сводится к проверке более простых аналитических условий.

Литература

1. Dobbs N. *Line, spiral, dense* // L'Enseignement Mathematique. 2016. V. 129. P. 91–107.

2. Vaskouski M., Prochorov N., Sheshko N. *Dense analytic curves generated by iterations of complex periodic functions* // Compututational Methods and Function Theory. 2019. V. 19. P. 285–298.