

5. Липницкий А.В. *О мере множеств неправильности линейных систем* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 211–215.
6. Барабанов Е.А. *О множествах неправильности семейств линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1067–1084.
7. Липницкий А.В. *Замкнутые множества неправильности линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 2. С. 189–194.
8. Липницкий А.В. *Описание строения множеств неправильности линейных дифференциальных систем с линейным параметром* // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 473–487.

СИСТЕМЫ ПРЕДСТАВИТЕЛИ КЛАССОВ ПРИВОДИМЫХ ПО ЛЯПУНОВУ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мазаник С.А.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
smazanik@bsu.by

Рассматриваем системы линейных дискретных уравнений

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad x \in \mathbb{R}^k, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (1)$$

где матрицы $A(n)$ невырождены и ограничены вместе со своими обратными $A^{-1}(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Преобразование $x(n) = L(n)y(n)$ назовем преобразованием Ляпунова, если невырожденная матрица $L(n)$ является матрицей Ляпунова, т.е. удовлетворяет условию

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} (\|L(n)\| + \|L^{-1}(n)\|) < +\infty.$$

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$y(n+1) = B(n)y(n), \quad y \in \mathbb{R}^k, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2)$$

где матрицы $B(n)$ также невырождены и ограничены вместе со своими обратными матрицами $B^{-1}(n)$.

Будем говорить, что системы (1) и (2) эквивалентны по Ляпунову, если существует преобразование Ляпунова, переводящее систему (1) в систему (2). Если в системе (2) матрица $B(n)$ оказывается постоянной, то в этом случае систему (1) будем называть *приводимой по Ляпунову*.

Легко видеть, что если система (1) приводима к системе (2) с постоянной матрицей $B(n) = B$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, то (1) приводима и к системе с постоянной матрицей $J(B)$, где $J(B)$ – нормальная жорданова форма матрицы B [1, с. 148]. Это означает, что в качестве систем представителей классов приводимых по Ляпунову систем можно использовать системы с постоянными матрицами, имеющими вид нормальной жордановой формы.

Более того, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Системы (1) и (2) ($k \leq 4$) с постоянными матрицами коэффициентов $A(n) = J$ и $B(n) = |J|$, где матрица J имеет нормальную жорданову форму, а $|J|$ – матрица, у которой все элементы матрицы $J = (J_{mp})$ заменены на $|J_{mp}|$, являются эквивалентными по Ляпунову.

Следствием этого результата является следующий результат.

Теорема 2. Каждый класс эквивалентности приводимых по Ляпунову систем (1) ($k \leq 4$) содержит систему с постоянной матрицей коэффициентов $|J|$, где матрица J имеет нормальную жорданову форму.

Для доказательства достаточно показать, что существует такая невырожденная матрица C , что матрица $J^n \cdot C \cdot (|J|^n)^{-1}$ является матрицей Ляпунова.

Литература

1. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ*. М: Мир, 1989.

УПРАВЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ РАВНОМЕРНО ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМЫМИ

Макаров Е.К.¹, Попова С.Н.²

¹ Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
jcm@im.bas-net.by

² Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
udsu.popova.sn@gmail.com

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными матрицами коэффициентов A и B . Через $X(t, s)$, $t, s \geq 0$, обозначим матрицу Коши соответствующей свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Система (1) называется вполне управляемой [1, с. 86], если для любого начального момента времени $t_0 \geq 0$ существует такой конечный момент времени $t_1(t_0) > t_0$, что для произвольного состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на отрезке $[t_0, t_1(t_0)]$ найдется управление u , обеспечивающее перевод системы (1) из состояния x_0 в состояние 0 на этом отрезке. При этом на норму используемого управления u никакие ограничения не накладываются, а длина отрезка $[t_0, t_1(t_0)]$ может неограниченно возрастать при $t_0 \rightarrow +\infty$. Если же при этом существуют такие числа $\vartheta > 0$ и $l > 0$, что для любого состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ при любом $t_0 \geq 0$ выполняется неравенство $t_1(t_0) \leq t_0 + \vartheta$, а управление u удовлетворяет оценке $\|u(t)\| \leq l\|x_0\|$ при всех $t \in [t_0, t_1(t_0)]$, то система (1) называется равномерно вполне управляемой [1, с. 95; 2]. Условия равномерной полной управляемости системы (1) могут быть также выражены при помощи матрицы Калмана [1, с. 93; 3]

$$W(t, s) = \int_t^s X(t, \tau) B(\tau) B^T(\tau) X^T(t, \tau) d\tau,$$